Capitole de Matematici Speciale

Codruţa Chiş

Cuprins

Introducere

Noţiunile cuprinse în mod obişnuit sub titlul de matematici speciale formează un bagaj de cunoştinţe important în pregătirea unui specialist în orice domeniu tehnic. Totodată, prin aparatul matematic dezvoltat în cadrul lor, ele reprezintă capitole de interes de sine stătător pentru orice matematician.

În cartea de faţă abordăm doar o parte din acest volum deosebit de bogat de noţiuni matematice. Pentru acestea am dat o expunere succintă, limitată doar la primele noţiuni de bază. Unele dintre acestea îşi găsesc continuarea în cadrul problemelor propuse la fiecare capitol.

Lucrarea se adresează studenţilor facultăţilor cu profil tehnic, dar poate fi utilizată şi de studenţii facultăţilor de matematică şi de profesorii de matematică în activitatea cu elevii interesaţi de unele capitole suplimentare programei de matematică de liceu.

Codruţa Chiş

Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale

1.1 Introducere în ecuaţii diferenţiale

Fenomenele din natură şi societate au adesea un pronunţat caracter dinamic, ele fiind procese evolutive în timp conform unor legi proprii. Exemple de asemenea fenomene pot fi evoluţia unui grup biologic sau social, precum şi o reacţie chimică.

Studiul unui asemenea proces evolutiv presupune urmărirea unui număr de parametri care caracterizează procesul sau fenomenul respectiv. În limbaj matematic, acest grup de parametri reprezintă starea sistemului sau a procesului şi formează un grup de funcţii dependente de timp. De exemplu, starea unei populaţii poate fi descrisă prin numărul de indivizi din care este compusă. Starea unei reacţii chimice poate fi dată, după caz, de temperatura sau concentraţia uneia sau mai multor substanţe care participă la reacţie.

Starea sistemului apare relativ rar ca o funcţie explicită de timp, ci, mult mai adesea, ca soluţie a unei anumite ecuaţii care descrie o lege ce guvernează fenomenul respectiv.

Modelarea matematică a unui fenomen dinamic revine la stabilirea acestor ecuaţii, care sunt în majoritatea cazurilor ecuaţii diferenţiale.

Definiţie 1.1.1. Se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul I**

o ecuaţie de forma

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{1.1}$$

unde $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie, $x \in I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ este variabila independentă, $y = y(x)$ ese funcţia necunoscută, iar $y' = y'(x)$ este derivata de ordinul I a funcţiei necunoscute.

Observaţie 1.1.2. Relaţia (1.1) se numeşte **forma generală (implicită)** a ecuaţiei diferenţiale.

Definiţie 1.1.3. Dacă ecuaţia (1.1) se poate transcrie în forma

$$y' = f(x, y)\,, \tag{1.2}$$

atunci aceasta se numeşte **forma explicită(**sau **forma normală)** a ecuaţiei diferenţiale.

Definiţie 1.1.4. Se numeşte **soluţie(**sau **integrală)** a ecuaţiei diferenţiale (1.1) sau (1.2) o funcţie $y = y(x)$, $y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe I pentru care

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0\,,\ (\forall)x \in I\,.$$

Definiţie 1.1.5. Se numeşte **soluţie generală(** sau **integrală generală)** a ecuaţiei diferenţiale (1.1) o familie de funcţii

$$\{\phi(x; C) | C \in \mathbb{R}\}$$

pentru care

$$F(x, \phi(x; C), \phi'(x; C)) = 0\,,\ (\forall)x \in I,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Definiţie 1.1.6. Se numeşte **soluţie particulară** a ecuaţiei (1.1) o funcţie $y = \phi_1(x)$ care se obţine din soluţia generală dând o valoare particulară constantei reale C.

Definiţie 1.1.7. O soluţie a ecuaţiei diferenţiale, care nu se poate obţine prin particularizarea constantei dintr-o soluţie generală, se numeşte **soluţie singulară**.

Observaţie 1.1.8. A rezolva sau a integra o ecuaţie diferenţială înseamnă determinarea tuturor funcţiilor $y = y(x)$ care verifică, pentru x dintr-o anumită mulţime o relaţie de forma (1.1).

Definiţie 1.1.9. Graficul unei soluţii $y = y(x)$ a ecuaţiei se numeşte **curbă integrală** a ecuaţiei date.

Definiţie 1.1.10. Prin **problema Cauchy** ataşată unei ecuaţii (1.1) se înţelege problema determinării acelo soluţii ale ecuaţiei care verifică o egalitate de forma

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{1.3}$$

unde $x_0 \in I$, iar $y_0 \in \mathbb{R}$ sunt fixate. Relaţia (1.3) se numeşte **condiţie iniţială**.

Observaţie 1.1.11. O problemă Cauchy constă deci dintr-o ecuaţie diferenţială şi o condiţie iniţială:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Teoremă 1.1.12. *Fie ecuaţia diferenţială $y' = f(x, y)$, în care $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. Dacă f satisface condiţiile*
(i) f este continuă pe D;
(ii) f admite derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe D,
atunci există un interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ şi o funcţie unică $y = y(x)$ definită pe acest interval, care să fie soluţie a problemei Cauchy.

Observaţie 1.1.13. Din punct de vedere geometric, rezolvarea problemei Cauchy revine la determinarea unei curbe integrale a ecuaţiei care să treacă prin (x_0, y_0).

Observaţie 1.1.14. Dacă $y = \phi(x; C)$ este o soluţie generală a ecuaţiei diferenţiale, atunci problema Cauchy se poate rezolva dacă există $C \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $y_0 = \phi(x_0; C)$.

1.2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Primele ecuaţii diferenţiale de ordinul I au fost rezolvate în secolul XVII, odată cu apariţia calcului integral:

$$y' = f(x) \quad , x \in I \,, \tag{1.5}$$

unde $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Soluţia acestei ecuaţii este

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \,.$$

1.2.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Definiţie 1.2.1. Se numeşte **ecuaţie cu variabile separabile** o ecuaţie de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y) \,, \tag{1.6}$$

unde $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar g nu se anulează în nici un punct din intervalul $(c,d)(a,b,c,d, \in \overline{\mathbb{R}})$.

Observaţie 1.2.2. Funcţia g fiind continuă şi nenulă, păstrează semn constant pe intervalul (c,d). Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $g > 0$ pe (c,d)(în caz contrar, înlocuim f şi g cu $-f$, respectiv $-g$). Fie $y = y(x)$, $y : (a,b) \longrightarrow (c,d)$, o soluţie a ecuaţiei (1.6). Atunci putem "separa variabilele":

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \,, \, (\forall) x \in (a,b) \,.$$

Deoarece f este continuă, f şi fie $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa. De asemenea, fie $G : (c,d \longrightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $\frac{1}{g}$. Rezultă că $G' = \frac{1}{g}$, $G \circ y : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă şi

$$(G \circ y)'(x) = G'(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x) \quad , (\forall) x \in (a,b) \,,$$

astfel că $(G \circ y)' = f$. Dar atunci $(G \circ y)' = F'$, astfel că există o constantă reală $C \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $G \circ y = F + C$. Rezultă că

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),\ (\forall)x \in I \subseteq (a, b)\,. \tag{1.7}$$

Reciproc, fie $y = y(x)$ de forma (1.7). Atunci

$$\begin{aligned} y'(x) &= (G^{-1}(F(x) + C))' = (G^{-1})'(F(x) + C) \cdot (F(x) + C)' = \\ &= \tfrac{1}{G'(G^{-1}(F(x)+C))} \cdot F'(x) = \tfrac{1}{G'(y(x))} \cdot f(x) = \tfrac{f(x)}{(\frac{1}{g})(y(x))} = \\ &= f(x) \cdot g(y(x))\,, \end{aligned}$$

astfel că $y = y(x)$ este soluţie a ecuaţiei (1.6). Am demonstrat astfel următoarea

Propoziţie 1.2.3. *Fie $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii continue cu $g \neq 0$ pe (c, d). Atunci ecuaţia cu variabile separabile*

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

are soluţia generală

$$y = y(x)\,, \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + C)\,,\ (\forall)x \in I \subseteq (a, b)\,,$$

unde $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, $G : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $\frac{1}{g}$, iar $C \in \mathbb{R}$ este o constantă reală.

Observaţie 1.2.4. Când avem de rezolvat o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, de forma $y' = f(x) \cdot g(y)$, procedăm astfel:
1) separăm variabilele: $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$.
2) integrăm şi obţinem $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx$, egalitate care este echivalentă cu $G \circ y = F + C$, $C \in \mathbb{R}$.
3) Scriem soluţia generală

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

4) Dacă avem date şi condiţii iniţiale, i.e. avem de rezolvat problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

soluţia se obţine considerând în soluţia generală $C = G(y_0) - F(x_0)$, sau, echivalent rezolvând în raport cu $y = y(x)$ ecuaţia

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds\,. \tag{1.8}$$

Exemplu 1.2.5. Să considerăm ecuaţia $y' = 2x \cdot (1 + y^2)$. Pentru a o rezolva, separăm în primul rând variabilele:

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x\,.$$

Prin integrare, avem că

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x\, dx\,,$$

de unde, ţinând cont de

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = arctg(y) + \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad \int 2x\, dx = x^2 + \mathcal{C}\,,$$

obţinem că

$$arctg(y(x)) = x^2 + C \quad , \text{cu } C \in \mathbb{R}\,.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este atunci

$$y(x) = tg(x^2 + C) \quad , C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplu 1.2.6. Să considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x \cdot y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Determinăm soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale din cadrul sistemului:

$$\begin{aligned}
&y' = 2x \cdot y \Longleftrightarrow \tfrac{y'}{y} = 2x \Longrightarrow \textstyle\int \frac{dy}{y} = \int 2x\, dx \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow ln(|y|) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = \pm e^{x^2+C},\ C \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{x^2},\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y(x) = K \cdot e^{x^2},\ K = \pm e^C \in \mathbb{R}^*\,.
\end{aligned}$$

Pentru a rezolva problema Cauchy, determinăm constanta nenulă K astfel încât să fie verificată condiţia iniţială $y(1) = 2$:

$$y(1) = 2 \Longleftrightarrow K \cdot e^{1^2} = 2 \Longleftrightarrow K \cdot e = 2 \Longleftrightarrow K = \frac{2}{e}\,.$$

Obţinem astfel soluţia

$$y(x) = \frac{2}{e} \cdot e^{x^2} = 2e^{x^2-1}\,.$$

Observaţie 1.2.7. Am fi putut rezolva problema Cauchy şi direct, fără să mai scriem soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale, folosind egalitatea integralelor definite:

$$\int_2^{y(x)} \frac{dt}{t} = \int_1^x 2s\; ds \Longleftrightarrow ln(y(x)) - ln(2) = x^2 - 1^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ln(y(x)) = ln(2) + x^2 - 1 \Longleftrightarrow y(x) = e^{ln(2)+x^2-1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y(x) = 2e^{x^2-1}\,.$$

1.2.2 Ecuaţii diferenţiale omogene

Definiţie 1.2.8. O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi se numeşte **ecuaţie diferenţială omogenă** dacă poate fi adusă la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,. \tag{1.9}$$

Observaţie 1.2.9. Pentru a rezolva ecuaţia se consideră funcţia auxiliară

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}\,. \tag{1.10}$$

Din relaţia de mai sus obţinem succesiv:

$$y(x) = x \cdot z(x) \Longrightarrow y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)\,.$$

Înlocuind în relaţia (1.9), ţinând cont de (1.10), obţinem atunci ecuaţia $z(x) + x \cdot z'(x) = f(z(x))$, sau, echivalent,

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}\,, \tag{1.11}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile. Rezolvând această ecuaţie se găsesc soluţiile $z = z(x)$, care ne permit, cu ajutorul relaţiei (1.10) să scriem soluţiile ecuaţiei omogene (1.9):

$$y = y(x) = x \cdot z(x) \,.$$

Exemplu 1.2.10. Să considerăm ecuaţia

$$2xyy' = x^2 + 3y^2 \,.$$

Împărţind ecuaţia prin x^2 se obţine

$$\frac{2xyy'}{x^2} = 1 + \frac{3y^2}{x^2} \Longleftrightarrow 2\frac{y}{x} \cdot y' = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y' = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} \,,$$

care reprezintă o ecuaţie diferenţială omogenă. Cu notaţia $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$z' = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1+3z^2}{2z} - z \right) \,.$$

Pentru rezolvarea acesteia scriem succesiv:

$$\frac{2z \cdot z'}{1+z^2} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{2z}{1+z^2}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ln(1+z^2) = ln(|x|) + C,\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 1 + z^2 = e^{ln(|x|)+C},\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow z^2 = \pm x \cdot e^C - 1,\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{K \cdot x - 1},\ K = \pm e^C \in \mathbb{R}^* \,.$$

Putem scrie atunci soluţia ecuaţiei iniţiale:

$$y(x) = \pm\sqrt{K \cdot x - 1} \quad , K \in \mathbb{R}^* \,.$$

Dacă în plus am avea şi o condiţie iniţială, ca de exemplu $y(1) = 2$, determinăm constanta K încât să fie verificată această condiţie:

$$\pm 1 \cdot \sqrt{K \cdot 1 - 1} = 2 \Longrightarrow \sqrt{K-1} = 2 \Longleftrightarrow K - 1 = 4 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow K = 5 \,.$$

Soluţia problemei Cauchy este atunci

$$y(x) = x\sqrt{5x-1} \,.$$

1.2.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul I

Definiţie 1.2.11. O ecuaţie diferenţială de forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)\,, \tag{1.12}$$

în care $P, Q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I**.

Observaţie 1.2.12. Denumirea provine de la faptul că atât funcţia necunoscută y, cât şi derivata sa y' apar numai la puterea întâi.

Observaţie 1.2.13. Dacă $Q(x) = 0$, ecuaţia se numeşte **ecuaţie liniară omogenă de ordinul I**, în caz contrar ea numindu-se **ecuaţie liniară neomogenă de ordinul I**.
Pentru rezolvarea ecuaţiei (1.12) vom folosi **metoda variaţiei constantelor**:
1) Vom determina soluţia generală $y = \phi(x; C)$ a ecuaţiei omogene $y' + P(x) \cdot y = 0$, după care
2) Vom înlocui constanta C cu o funcţie $C(x)$, pe care o vom determina în aşa fel încât funcţia $y = \phi(x; C(x))$ să fie soluţie a ecuaţiei neomogene $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.

Fie deci ecuaţia omogenă

$$y' + P(x) \cdot y = 0\,.$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile, pentru care putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
& y' = -P(x) \cdot y \Longleftrightarrow \tfrac{y'}{y} = -P(x) \Longrightarrow \int \tfrac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow ln(|y|) = -\int P(x)\,dx + C,\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \\
& \Longleftrightarrow y(x) = \pm e^{C} \cdot e^{-\int P(x)\,dx},\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \\
& \Longleftrightarrow y(x) = K \cdot e^{-\int P(x)\,dx},\ K = \pm e^{C} \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Pentru ecuaţia neomogenă căutăm o soluţie de forma

$$y(x) = K(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,,$$

prin "varierea constantei" K. Pentru funcţia y de mai sus avem

$$y'(x) = K'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} + K(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} \cdot (-P(x))\,.$$

Înlocuind în ecuaţia (1.12) obţinem

$$\begin{array}{l} K'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} + K(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} \cdot (-P(x)) + \\ K(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} \cdot P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow K'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow K(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} dx + K_1,\ K_1 \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Obţinem atunci soluţia generală a ecuaţiei (1.12):

$$y(x) = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} dx + K_1 \right) \cdot e^{-\int P(x)\,dx},\ K_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplu 1.2.14. Să considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy = x^3 \\ y(0) = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

Ecuaţia diferenţială din cadrul problemei este una liniară de ordinul I, cu $P(x) = 2x$ şi $Q(x) = x^3$. Soluţia sa generală va fi de forma

$$y(x) = \left(\int x^3 \cdot e^{\int 2x\,dx} dx + K \right) \cdot e^{-\int 2x\,dx},\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Avem

$$\int 2x\,dx = x^2 + \mathcal{C}$$

şi

$$\begin{array}{l} \int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \left(2x \cdot e^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \left(e^{x^2} \right)' dx = \\ \frac{1}{2} \left(x^2 \cdot e^{x^2} - \int (x^2)' \cdot e^{x^2} dx \right) = \frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}(x^2 - 1)\,, \end{array}$$

astfel că

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot e^{x^2}(x^2 - 1) + K \right) \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + K \cdot e^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Determinăm acum constanta $K \in \mathbb{R}$, astfel încât să fie verificată condiţia iniţială $y(0) = \frac{e-1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + K \cdot e^0 = \frac{e-1}{2} \Longleftrightarrow K = \frac{e}{2}\,,$$

şi soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \frac{e}{2} \cdot x^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1 + e^{1-x^2}\right)\,.$$

1.2.4 Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli

Definiţie 1.2.15. O ecuaţie diferenţială de forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}\,, \tag{1.13}$$

în care $P, Q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, cu Q neidentic nulă, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli**.

Observaţie 1.2.16. Valorile exceptate ale exponentului α corespund unor ecuaţii liniare de ordinul I(omogenă pentru $\alpha = 1$, respectiv neomogenă pentru $\alpha = 0$).

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1.13), împărţim ecuaţia prin y^{α}, obţinând

$$y' \cdot y^{-\alpha} + P(x) \cdot y^{1-\alpha} = Q(x)\,,$$

sau, echivalent,

$$(1-\alpha)y' \cdot y^{-\alpha} + (1-\alpha)P(x) \cdot y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x)\,,$$

Considerm̊ funcţia auxiliară $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$, pentru care avem că $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$. Înlocuind în relaţia de mai sus, avem că

$$z' + (1-\alpha)P(x) \cdot z = (1-\alpha)Q(x)\,,$$

care este o ecuaţie liniară de ordinul I în raport cu funcţia necunoscută $z = z(x)$. Rezolvând această ecuaţie, din soluţia sa $z = z(x)$ putem obţine o soluţie $y = y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ a ecuaţiei de tip Bernoulli iniţiale.

Exemplu 1.2.17. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' + 4xy = x\sqrt{y}\,.$$

Aceasta este o ecuaţie de tip Bernoulli, în care $P(x) = 4x$, $Q(x) = x$, iar $\alpha = \frac{1}{2}$. Pentru $z = z(x) = y(x)^{1-\alpha} = \sqrt{y(x)}$ obţinem atunci ecuaţia liniară

$$z' + 2xz = \frac{x}{2}\,,$$

a cărei soluţie generală are forma

$$z(x) = \left(\int \frac{x}{2} \cdot e^{\int 2x\,dx} + K\right) \cdot e^{-\int 2x\,dx},\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Obţinem

$$z(x) = \left(\frac{1}{4} \cdot e^{x^2} + K\right) \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{4} + K \cdot e^{-x^2}\,.$$

Prin urmare,

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} = (z(x))^2 = \left(\frac{1}{4} + K \cdot e^{-x^2}\right)^2,\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Propoziţie 1.2.18. *Dacă y_1 este o soluţie particulară nenulă a ecuaţiei Bernoulli (1.13), atunci prin schimbarea de funcţie $z = \frac{y}{y_1}$, funcţia necunoscută z verifică o ecuaţie cu variabile separabile*

Demonstraţie. Pentru funcţia z avem că

$$\begin{aligned} z' &= \tfrac{y'y_1 - yy_1'}{y_1^2} = \tfrac{(Qy^\alpha - Py)y_1 - y(Qy_1^\alpha - Py_1)}{y_1^2} = \\ &= Qy_1^{\alpha-1}\tfrac{y}{y_1}\left(\tfrac{y^\alpha}{y_1^\alpha} - 1\right) = Q_1 z(z^\alpha - 1)\,. \end{aligned}$$

$\square$

1.2.5 Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati

Definiţie 1.2.19. O ecuaţie diferenţială de forma

$$y' = P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x)\,, \tag{1.14}$$

în care $P, Q, R : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, cu P, R neidentic nule, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Riccati**.

Observaţie 1.2.20. Dacă $a, b, c, d : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, schimbarea de funcţie $z = \frac{a(x)y+b(x)}{c(x)y+d(x)}$ transformă o ecuaţie diferenţială de tip Riccati de asemenea într-o ecuaţie Riccati.

Propoziţie 1.2.21. *Dacă y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati (1.14), atunci prin schimbarea de funcţie $z = y - y_1$, funcţia necunoscută z verifică o ecuaţie de tip Bernoulli.*

Demonstraţie. Scăzând relaţiile (1.14) şi $y_1' = Py_1^2 + Qy_1 + R$, obţinem că

$$\begin{aligned} &(y - y_1)' = P(x)(y^2 - y_1^2) + Q(x)(y - y_1) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow z' = P(x)z(z + 2y_1) + Q(x)z \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow z' = P(x)z^2 + (2y_1P(x) + Q(x))z\,, \end{aligned}$$

astfel că funcţia necunoscută z verifică o ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli. □

Corolar 1.2.22. *Dacă y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati (1.14), atunci prin schimbarea de funcţie $z = \frac{1}{y-y_1}$, funcţia necunoscută z verifică o ecuaţie diferenţială liniară.*

Exemplu 1.2.23. Ecuaţia diferenţială de tip Riccati

$$y' = -sin(x) \cdot y^2 + 2\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

are în mod evident soluţia particulară $y_1 = \frac{1}{cos(x)}$. Cu schimbarea de funcţie $z = \frac{cos(x)}{ycos(x)-1}$ obţinem atunci că z verifică ecuaţia diferenţială liniară

$$z' = 2\frac{sin(x)}{cos(x)}z + sin(x)\,,$$

care are soluţia generală

$$z = \frac{3C - cos^3(x)}{3cos^2(x)} \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Soluţia generală a ecuaţiei Riccati este atunci

$$y = \frac{1}{cos(x)} + \frac{3cos^2(x)}{3C - cos^3(x)} \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Corolar 1.2.24. *Dacă y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei Riccati (1.14), atunci prin schimbarea de funcţie $z = \frac{y-y_1}{y-y_2}$, funcţia necunoscută z verifică o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.*

Observaţie 1.2.25. Ecuaţia cu variabile separabile verificată de funcţia z este

$$z' = P(x)(y_1(x) - y_2(x))z\,.$$

Exemplu 1.2.26. Căutând pentru ecuaţia de tip Riccati

$$x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$$

soluţii particulare de forma $y = \frac{a}{x}$, cu $a \in \mathbb{R}$, se găsesc cu uşurinţă $y_1(x) = \frac{1}{x}$ şi $y_2(x) = \frac{4}{x}$. Funcţia $z = \frac{y-y_1}{y-y_2}$ verifică atunci ecuaţia cu variabile separabile

$$z' = \frac{3}{x}z\,,$$

a cărei soluţie generală este $z = Cx^3$. Cum $y = \frac{zy_2-y_1}{z-1}$, pentru ecuaţia Riccati iniţială obţinem atunci soluţia generală

$$y = \frac{4Cx^3 - 1}{Cx^4 - x}\,.$$

Observaţie 1.2.27. Soluţia generală a unei ecuaţii Riccati are forma

$$y = \frac{C \cdot a(x) + b(x)}{C \cdot c(x) + d(x)} \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Propoziţie 1.2.28. *Dacă* y_1, y_2, y_3, y_4 *sunt patru soluţii ale ecuaţiei Riccati, există* $k \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4} = k\,.$$

Demonstraţie. Dacă $y_i = \frac{C_i \cdot a(x) + b(x)}{C_i \cdot c(x) + d(x)}$, $i = \overline{1,4}$, sunt patru soluţii ale ecuaţiei Riccati, atunci

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4} = \frac{C_1 - C_3}{C_1 - C_4} : \frac{C_2 - C_3}{C_2 - C_4}\,.$$

□

Corolar 1.2.29. *Dacă* y_1*,* y_2 *şi* y_3 *sunt trei soluţii particulare ale ecuaţiei Ricatti, soluţia generală este dată de*

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Exemplu 1.2.30. Dcaă pentru ecuaţia Riccati

$$(1 - x^3)y' = y^2 - x^2 y - 2x$$

căutăm soluţii polinomiale sau funcţii putere, găsim soluţiile particulare $y_1(x) = x + 1$, $y_2(x) = -x^2$ şi $y_3(x) = -\frac{1}{x}$. Soluţia generală a ecuaţiei se obţine atunci din egalitatea

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Rezultă că

$$y = \frac{(x+1)(x^3 - 1) - Cx^2(1 + x + x^2)}{x^3 - 1 + C(1 + x + x^2)} \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Observaţie 1.2.31. Orice ecuaţie Riccati poate fi adusă, efectuând substituţii de forma $y(x) = u(x) \cdot z(x)$ şi $z(x) = v(x) + w(x)$, la una din formele

$$w' = w^2 + R_1(x) \quad \text{sau} \quad w' = -w^2 + R_1(x)\,.$$

1.2.6 Ecuaţii diferenţiale de tip Clairaut şi Lagrange

Definiţie 1.2.32. O ecuaţie diferenţială de forma

$$y = xy' + Q(y')\,, \tag{1.15}$$

în care $Q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Clairaut**.

Observaţie 1.2.33. Ecuaţia Clairaut (1.15) are soluţia generală dată de

$$y = Cx + Q(C) \quad (C \in \mathbb{R})\,,$$

şi o soluţie singulară exprimată parametric

$$\begin{cases} x = -Q'(p) \\ y = -pQ'(p) + Q(p) \end{cases} \quad (p \in \mathbb{R})\,.$$

Exemplu 1.2.34. Fie ecuaţia Clairaut

$$y = xy' + \frac{1}{y'^2}\,.$$

Soluţia sa generală este $y = xC + \frac{1}{C^2}$, $(C \in \mathbb{R})$, iar cea singulară este dată parametric de

$$\begin{cases} x = \frac{2}{p^3} \\ y = \frac{3}{p^2} \end{cases} \quad (p \in \mathbb{R})\,.$$

Eliminând parametrul p, obţinem $4y^3 = 27x^2$.

Definiţie 1.2.35. O ecuaţie diferenţială de forma

$$y = xP(y') + Q(y')\,, \tag{1.16}$$

în care $P, Q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Lagrange**.

Observaţie 1.2.36. Rezolvarea ecuaţiei Lagrange (1.16) se face notând $y' = p$ şi derivând egalitatea $y(x) = xP(p(x)) + Q(p(x))$. Considerând variabila x ca funcţie de p, pe intervale pentru care $P(p) \neq p$, se obţine atunci o ecuaţie diferenţială liniară

$$x'(p) = \frac{P'(p)}{p - P(p)} x(p) + \frac{Q'(p)}{p - P(p)} \,.$$

Pentru această ecuaţie liniară se obţine atunci o soluţie de forma $x = x(p, C)$, $p, C \in \mathbb{R}$, iar soluţia generală a ecuaţiei Lagrange se obţine în formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)P(p) + Q(p) \end{cases} \qquad (p, C \in \mathbb{R}) \,.$$

Pe lângă aceste soluţii, ecuaţia Lagrange mai admite şi soluţiile

$$y = xP(p_i) + Q(p_i) \,,$$

unde p_i sunt soluţiile ecuaţiei $P(p) = p$.

Exemplu 1.2.37. Fie ecuaţia de tip Lagrange

$$y = 2xy' - y'^2 \,.$$

Notând $y' = p$ şi derivând ecuaţia obţinută, avem că $x = x(p)$ verifică ecuaţia diferenţială liniară

$$x' = \frac{2}{p} x - 2 \,.$$

Obţinem că $x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}$ şi soluţia generală în formă parametrică a ecuaţiei Lagrange date este

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2} \\ y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p} \end{cases} \qquad (p, C \in \mathbb{R}) \,.$$

Pe lângă acestea, ecuaţia Lagrange mai admite şi soluţia $y = 0$.

1.3 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

1.3.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

Ecuaţii cu coeficienţi variabili

Definiţie 1.3.1. Fie $a_0, a_1, \dots, a_n : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue pe intervalul I. Ecuaţia diferenţială

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1.17)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul** n **cu coeficienţi variabili**.

Observaţie 1.3.2. Dacă $a_n(x) \neq 0$ pe intervalul I, ecuaţia (1.17) se poate scrie sub forma

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0\,,$$

unde $b_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}$, $\imath = \overline{1, n}$.

Definiţie 1.3.3. Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^n$(i.e., de n ori derivabile, cu derivatele de ordin n continue) pe intervalul I, determinantul

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numeşte **wronskianul sistemului de funcţii** $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Definiţie 1.3.4. Spunem că funcţiile $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ formează **un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială** (1.17) dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei şi wronskianul lor satisface condiţia $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$.

Teoremă 1.3.5. *Orice ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul n admite un sistem fundamental de soluţii.*

Teoremă 1.3.6. *Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ formează un sistem fundamental de soluţii al unei ecuaţii liniare omogene (1.17) de ordin n, soluţia generală a ecuaţiei (1.17) este*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}).$$

Exemplu 1.3.7. Pentru ecuaţia diferenţială

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0$$

se verifică imediat că $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$ şi $y_3(x) = e^{-x}$ formează un sistem fundamental de soluţii. Soluţia generală a ecuaţiei este prin urmare

$$y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Teoremă 1.3.8. *Dacă $x_0 \in I$ este un punct fixat, iar n numere reale $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ sunt fixate, ecuaţia (1.17) admite o unică soluţie y care să verifice condiţiile iniţiale $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.*

Propoziţie 1.3.9. *Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^n$ pe intervalul I cu proprietatea că $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, atunci există o ecuaţie diferenţială liniară omogenă având sistemul fundamental de soluţii $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dată de*

$$W(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Demonstraţie. Evident $W(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin n, care este verificată de fiecare dintre funcţiile y_i, $i = \overline{1, n}$. În plus, cum wronskianul acestor funcţii este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, ele formează un sistem fundamental de soluţii. $\square$

Exemplu 1.3.10. Fie $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trei funcţii date de $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^3$, respectiv $y_3(x) = e^x$. Wronskianul acestora este

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix} = 2xe^x(x^2 - 3x + 3)$$

este nenul pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul 3, pentru care y_1, y_2, y_3 reprezintă pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}^*$ un sistem fundamental de soluţii, este

$$\begin{aligned} & W(y, y_1, y_2, y_3) = 0 \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow x(x^2 - 3x + 3)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' + \\ & +3x(x-1)y' - 3(x-1)y = 0\,. \end{aligned}$$

Definiţie 1.3.11. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n, f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue pe intervalul I. Ecuaţia diferenţială

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1.18)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordinul n cu coeficienţi variabili**.

Observaţie 1.3.12. Notând cu $T : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I)$ operatorul dat de

$$T(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y\,,$$

ecuaţia (1.18) se poate scrie sub forma $T(y) = f$.

Propoziţie 1.3.13. *Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene de ordin n se obţine ca sumă între o soluţie particulară y_p a ecuaţiei neomogene $T(y) = f$ şi soluţia generală $\overline{y}$ a ecuaţiei omogene asociate $T(y) = 0$:*

$$y = y_p + \overline{y}\,.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $T(y) = f = T(y_p)$, atunci

$$T(y - y_p) = T(y) - T(y_p) = 0\,.$$

□

Corolar 1.3.14. *Dacă* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene* $T(y) = 0$*, iar* y_p *este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene* $T(y) = f$*, atunci soluţia generală a ecuaţiei neomogene* $T(y) = f$ *este*

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$
$$(C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}) .$$

Propoziţie 1.3.15. *Dacă* $f, f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^n(I)$ *verifică egalitatea* $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$*, iar* y_{pi} *sunt soluţii particulare ale ecuaţiilor* $T(y) = f_i$*,* $i = \overline{1, m}$*, atunci*

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \ldots + y_{pm}$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei $T(y) = f$*.*

Demonstraţie. Dacă $T(y_{pi}) = f_i$, $i = \overline{1, m}$, atunci

$$T(y_{p1} + y_{p2} + \ldots + y_{pm}) = T(y_{p1}) + T(y_{p2}) + \ldots + T(y_{pm}) =$$
$$= f_1 + f_2 + \ldots + f_m = f .$$

$\square$

Observaţie 1.3.16. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene $T(y) = 0$, o metodă de determinare a unei soluţii a ecuaţiei neomogene $T(y) = f$ este cea a ”varierii constantelor - se caută pentru ecuaţie neomogenă soluţii de forma

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) ,$$

funcţiile $C_1, C_2, \ldots, C_n$ determinându-se din sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_n(x)} . \end{cases}$$

Exemplu 1.3.17. Fie ecuaţia diferenţială

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^3 e^{2x} .$$

Ecuaţia omogenă asociată

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

are în mod evident soluţiile $y_1(x) = x$ şi $y_2(x) = e^x$, pentru care

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1) .$$

y_1 şi y_2 formează un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene pe orice interval $I \subseteq \mathbb{R}^*$. Căutăm în continuare o soluţie particulară a ecuaţiei omogene de forma

$$y(x) = C_1(x)x + C_2(x)e^x ,$$

unde C_1, C_2 verifică sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'e^x = 0 \\ C_1' + C_2'e^x = \frac{(x-1)^3 e^{2x}}{x-1} . \end{cases}$$

Obţinem

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ (x-1)^2 e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-(x-1)^2 e^{3x}}{e^x(x-1)} = -(x-1)e^{2x} ,$$

respectiv

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (x-1)^2 e^{2x} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{x(x-1)^2 e^{2x}}{e^x(x-1)} = x(x-1)e^x .$$

Atunci $C_1(x) = \frac{1}{4}(3-2x)e^{2x}$ şi $C_2(x) = (x^2-3x+3)e^x$, astfel că o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date este

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x(3-2x)e^{2x} + (x^2-3x+3)e^{2x} = \frac{1}{4}(2x^2-9x+12)e^{2x} ,$$

iar soluţia generală

$$y(x) = \frac{1}{4}(2x^2-9x+12)e^{2x} + c_1x + c_2e^x .$$

Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi

Definiţie 1.3.18. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ date, cu $a_n \neq 0$. Ecuaţia diferenţială

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1.19)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul n cu coeficienţi constanţi**.

Observaţie 1.3.19. Evident, împărţind prin a_n, ecuaţia (1.19) poate fi rescrisă în forma

$$y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_1 y' + b_0 y = 0\,,$$

unde $b_i = \frac{a_i}{a_n}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Definiţie 1.3.20. Ecuaţia algebrică

$$r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \ldots + b_1 r + b_0 = 0\,,$$

unde $b_i = \frac{a_i}{a_n}$, $i = \overline{0, n-1}$, se numeşte **ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei liniare cu coeficienţi constanţi (1.19)**.

Teoremă 1.3.21. *Fie $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ rădăcinile reale, respectiv $r_{k+1} = a_1 + b_1 i, \ldots, r_{k+l} = a_l + b_l i, r_{k+l+1} = a_1 - b_1 i, \ldots, r_{k+2l} = a_l - b_l i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $a_j \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}^*$, rădăcinile complexe nereale ale ecuaţiei caracteristice asociate ecuaţiei liniare cu coeficienţi constanţi (1.19), cu multiplicităţile corespunzătoare $m_1, \ldots, m_k$, $m_{k+1} = m_{k+l+1}, \ldots, m_{k+l} = m_{k+2l}$. Un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (1.19) este atunci dat de funcţiile:*

$$\begin{aligned}
&e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{r_1 x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e^{r_k x}, x e^{r_k x}, \ldots, x^{m_k - 1} e^{r_k x},\\
&e^{a_1 x} cos(b_1 x), x e^{a_1 x} cos(b_1 x), \ldots, x^{m_{k+1} - 1} e^{a_1 x} cos(b_1 x),\\
&e^{a_1 x} sin(b_1 x), x e^{a_1 x} sin(b_1 x), \ldots, x^{m_{k+1} - 1} e^{a_1 x} sin(b_1 x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e^{a_l x} cos(b_l x), x e^{a_l x} cos(b_l x), \ldots, x^{m_{k+l} - 1} e^{a_l x} cos(b_l x),\\
&e^{a_l x} sin(b_l x), x e^{a_l x} sin(b_l x), \ldots, x^{m_{k+l} - 1} e^{a_l x} sin(b_l x)\,.
\end{aligned}$$

Exemplu 1.3.22. Fie ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$y^{v} - 11y^{iv} + 50y''' - 94y'' + 13y' + 169y = 0\,.$$

Ecuaţia caracteristică asociată

$$r^5 - 11r^4 + 50r^3 - 94r^2 + 13r + 169$$

are rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = r_3 = 3 + 2i, r_4 = r_5 = 3 - 2i$. Soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene date este atunci

$$y(x) = c_1e^{-x} + ((c_2 + c_3x)cos(2x) + (c_4 + c_5x)sin(2x))e^{3x}\,.$$

Definiţie 1.3.23. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ numere reale date, cu $a_n \neq 0$ şi $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Ecuaţia diferenţială

$$a_n(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1(ax+b)y' + a_0y = f(x) \tag{1.20}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul** n **de tip Euler**.

Observaţie 1.3.24. Dacă $\frac{-b}{a} \notin I$, efectuând schimbarea de variabilă

$$t = ln(|ax + b|)\,,$$

ecuaţia de tip Euler devine o ecuaţie cu coeficienţi constanţi în raport cu variabila t.

Exemplu 1.3.25. Fie ecuaţia

$$x^3y'' - x^2y' - 3xy = -16ln(x)\,.$$

Ecuaţia devine o ecuaţie de tip Euler dacă împărţim prin variabila pozitvă x:

$$x^2y'' - xy' - 3y = -16\frac{ln(x)}{x}\,.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $t = ln(x)$. Funcţia $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $z(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ verifică atunci egalităţile

$$z'(t) = e^ty'(e^t)\,, \quad z''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)\,,$$

astfel că

$$xy'(x) = e^t y'(e^t) = z'(t)\,, \qquad x^2 y''(x) = e^{2t} y''(e^t) = z''(t) - z'(t)\,.$$

Ecuaţia Euler se scrie atunci

$$z''(t) - 2z'(t) - 3z(t) = -16\frac{t}{e^t}\,,$$

sau, echivalent

$$z'' - 2z' - 3z = -16te^{-t}\,.$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $r^2 - 2r - 3 = 0$ sunt $r_1 = -1$ şi $r_2 = 3$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este $\overline{z}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$. Folosind metoda variaţiei constantelor obţinem şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene:

$$z_p(t) = (2t^2 + t)e^{-t}\,.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene cu coeficienţi constanţi este atunci

$$z(t) = (2t^2 + t)e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Ecuaţia iniţială de tip Euler are atunci soluţia

$$y(x) = \frac{2ln^2(x) + ln(x)}{x} + \frac{c_1}{x} + c_2 x^3 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

1.4 Probleme propuse

Problema 1.1. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:
a) $y' = y^2$.
b) $y'^2 = y$.
c) $yy' = 1$.
d) $1 + y^2 + xyy' = 0$.
e) $y = xy'^2 + y'^2$.
f) $y'(x^2 - 1) = y^2 - 1$.

Problema 1.2. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale omogene:
a) $(x - 3y)dx = (y - 3x)dy$.
b) $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$.
c) $(y^2 - 2xy)dx = (x^2 - 2xy)dy$.
d) $2x^3y' - 3x^2y - y^3 = 0$.
e) $x^2y' = y^2 - 2xy + 2x^2$.
f) $2y(y' + 2) = xy'^2$.
g) $3x + 4y + 2xy' = 0$.

Problema 1.3. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene:
a) $2(x - 2y + 1)dx + (5x - 4y - 4)dy = 0$.
b) $(y - 2x + 1)dx + xdy = 0$.
c) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.
d) $(x + 2y - 5)dx + (2x + 4y + 1)dy = 0$.

Problema 1.4. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale liniare:
a) $y' - y = e^{2x}$.
b) $y + xy' = 2x - 1$.
c) $(1 + x^2)y' - xy = 1$.
d) $y + 2xy' = 5x^2 + 1$.
e) $(x + 1)y' - y = 2$.
f) $3x + 4y + 2xy' = 0$.

Problema 1.5. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli:

a) $xy' + y = y^2 ln(x)$.
b) $2x^3y' - 3x^2y - y^3 = 0$.
c) $2xyy' - y^2 + x^2 - a^2 = 0$.
d) $3y^2y' sin(x) - y^3 cos(x) = 1$.
e) $xy' - 2y = 2x^2\sqrt{y}$.

Problema 1.6. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Riccati:
a) $y'(x^2 - 1) = y^2 - 1$, ştiind că admite soluţia $y_1 = x$.
b) $y'(x^2 - 1) = y^2 - 1$, ştiind că admite soluţia $y_1 = 1$.
c) $x^2y' = y^2 - 2xy + 2x^2$, ştiind că admite ca soluţie particulară un polinom de gradul întâi.

Problema 1.7. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Lagrange:
a) $yy' + xy'^2 + 1 = 0$.
b) $y - x = y'^3 - 3y'$.
c) $y = xy'^2 + y'^2$.
d) $y = x(1 + y') + y'^2$.
e) $y + xy' = 2x - 1$.
f) $2y(y' + 2) = xy'^2$.
g) $3x + 4y + 2xy' = 0$.

Problema 1.8. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Clairaut:
a) $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
b) $y = xy' + y' + y'^2$.
c) $(x + 1)y' - y = 2$.
d) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.
e) $y = xy' - 2\sqrt{1 + y'^2}$.

Problema 1.9. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordin superior:
a) $2y'' + 3y' - 5y = 0$.
b) $4y'' + 4y' + y = 0$.
c) $y'' + y' + 2y = 0$.
d) $9y'' + 4y = 0$.

Problema 1.10. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordin superior:
a) $y'' - 9y' + 20y = e^{6x}$.
b) $y'' - 4y' + 13y = cos(3x)$.
c) $y'' + 2y' + y = x^2 e^x$.
d) $y'' + 4y = e^x cos(2x)$.
e) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
f) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.
g) $y'' - y = xe^x + e^{2x}$.
h) $y'' + 6y' + 9y = 1 + 2e^x - 4e^{-3x} + 2cos(x)$.
i) $y'' + 9y = 2cos(3x) + 5sin(3x)$.
j) $y'' + 2y' + y = 3e^{2x} - 2e^{-x} + cos(x)$.
k) $y'' - y = xe^x$.
l) $y'' + y = tg(x)$.
m) $y''' - y'' - y' + y = 0$.
n) $y^{iv} + 2y'' + y = sin(x)$.
o) $y^{iv} - y = xe^x$.

Problema 1.11. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior cu coeficienţi variabili:
a) $x^3 y''' + xy' - x = 0$.
b) $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$, $x > 2$.

Capitolul 2

Teoria câmpurilor

2.1 Câmpuri scalare şi câmpuri vectoriale

Definiţie 2.1.1. O aplicaţie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte **câmp scalar**. Dacă φ este derivabilă parţial, spunem că φ este **un câmp scalar derivabil**, şi notăm $\varphi \in \mathcal{C}'(D)$. Dacă φ este derivabilă parţial de k ori şi derivatele sale parţiale de ordin k, spunem că φ este **un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^k$**, şi notăm $\varphi \in \mathcal{C}^k(D)$.

Definiţie 2.1.2. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar, şi $C \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare fixat. **Suprafaţa de nivel** C **a câmpului scalar** φ este mulţimea

$$\mathcal{S}_{\varphi,C} = \varphi^{-1}(C) = \{M \in D|\, \varphi(M) = C\}\,.$$

Ecuaţia în coordonate a suprafeţei de nivel C a câmpului φ este $\varphi(x, y, z) = C$.

Definiţie 2.1.3. O aplicaţie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se numeşte **câmp vectorial**. **Componentele câmpului vectorial** $\overline{v}$ sunt funcţiile $v_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, date de $v_i = pr_i(\overline{v})$, $i = \overline{1,3}$. Spunem că $\overline{v}$ este un **câmp vectorial derivabil, respectiv de clasă $\mathcal{C}^k$**, şi notăm în acest caz $\overline{v} \in \mathcal{C}'(D)$, respectiv $\overline{v} \in \mathcal{C}^k(D)$, dacă componentele sale sunt câmpuri scalare derivabile, respectiv de clasă $\mathcal{C}^k$.

Observaţie 2.1.4. Dacă $\overline{v}$ este un câmp vectorial cu componentele v_i, $i = \overline{1,3}$, atunci pentru orice punct $M \in D$ are loc egalitatea

$$\overline{v}(M) = (v_1(M), v_2(M), v_3(M)) = v_1(M)\overline{i} + v_2(M)\overline{j} + v_3(M)\overline{k}\,,$$

unde $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ sunt versorii axelor de coordonate Ox, Oy, Oz.

Definiţie 2.1.5. Dacă $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, o curbă $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$ situată în D se numeşte **linie de câmp a câmpului vectorial** $\overline{v}$ dacă în fiecare punct $M \in \gamma$, vectorul $\overline{v}(M)$ este tangent curbei.

Observaţie 2.1.6. Condiţia din definiţia de mai sus este echivalentă cu cu existenţa unui scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overline{v}(\gamma(t)) = \alpha\gamma'(t) \quad , (\forall)t \in I\,.$$

Observaţie 2.1.7. Coliniaritatea vectorilor $\gamma'(t)$ şi $\overline{v}(\gamma(t))$ se poate exprima şi prin egalităţile

$$\overline{v}(\gamma(t)) \times \gamma'(t) = 0\,,$$

sau

$$\frac{x'(t)}{v_1(x(t), y(t), z(t))} = \frac{y'(t)}{v_2(x(t), y(t), z(t))} = \frac{z'(t)}{v_3(x(t), y(t), z(t))}\,,$$

unde $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$.

Observaţie 2.1.8. Considerând curba γ parametrizată după prima sa componentă x, ecuaţiile de mai sus se pot scrie sub forma sistemului

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, y, z) \\ z'(x) = f_2(x, y, z)\,, \end{cases}$$

unde $f_1 = \frac{v_2}{v_1}$, respectiv $f_2 = \frac{v_3}{v_1}$. Rezolvând acest sistem de ecuaţii diferenţiale, obţinem

$$\begin{cases} y = y(x, C_1, C_2) \\ z = z(x, C_1, C_2) \end{cases} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Explicitând sistemul de mai sus în raport cu C_1 şi C_2, obţinem pentru liniile de câmp ecuaţii de forma

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = C_1 \\ F_2(x,y,z) = C_2 \,. \end{cases}$$

Definiţie 2.1.9. O **suprafaţă de câmp** a unui câmp vectorial $\overline{v}$ este o suprafaţă generată de linii de câmp.

Observaţie 2.1.10. Deoarece condiţia ca o familie de curbe să genereze o suprafaţă este ca ele să depindă de un singur parametru, pentru ca o familie de linii de câmp, date prin ecuaţiile

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = C_1 \\ F_2(x,y,z) = C_2 \end{cases} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \,.$$

să genereze o suprafaţă, trebuie ca parametrii reali C_1 şi C_2 să fie dependenţi, i.e. să verifice o relaţie de forma

$$S(C_1, C_2) = 0 \,.$$

Ecuaţia corespunzătoare a suprafeţei de câmp este atunci

$$S(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) = 0 \,.$$

Propoziţie 2.1.11. *Condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă Σ să fie suprafaţă de câmp a unui câmp vectorial $\overline{v}$ este ca în fiecare punct $M \in \Sigma$ vectorul $\overline{v}(M)$ este tangent suprafeţei Σ.*

Observaţie 2.1.12. Dacă ecuaţia suprafaţei Σ este

$$F(x,y,z) = 0 \,,$$

vectorul $\frac{\partial F}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overline{k}$ este normal pe suprafaţa S, deci pe orice vector tangent la aceasta. Prin urmare, condiţia ca suprafaţa S să fie suprafaţă de câmp a câmpului vectorial $\overline{v}$ este ca în fiecare punct $M \in S$, vectorii $\overline{v}(M)$ şi $\frac{\partial F(M)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F(M)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F(M)}{\partial z}\overline{k}$ să fie ortogonali. Obţinem astfel că S este suprafaţă de câmp a câmpului vectorial $\overline{v}$ dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial F(M)}{\partial x} v_1(M) + \frac{\partial F(M)}{\partial y} v_2(M) + \frac{\partial F(M)}{\partial z} v_3(M) = 0 \quad , (\forall) M \in \Sigma \,.$$

Exemplu 2.1.13. Fie câmpul vectorial $\overline{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin

$$\overline{v}(x,y,z) = (xy - 2x^2)\overline{i} + (4xz - y^2)\overline{j} + (yz - 2x^2)\overline{k}\,.$$

Liniile de câmp ale lui $\overline{v}$ sunt date de ecuaţiile

$$\frac{x'(t)}{xy - 2x^2} = \frac{y'(t)}{4xz - y^2} = \frac{z'(t)}{yz - 2x^2}\,.$$

Se verifică uşor în aceste condiţii că

$$yx'(t) + xy'(t) + 2zz'(t) = 0 \quad \text{şi} \quad 2xx'(t) + zy'(t) + yz'(t) = 0\,.$$

Obţinem liniile de câmp

$$\begin{cases} xy + z^2 = C_1 \\ x^2 + yz = C_2 \end{cases}$$

Suprafeţele de câmp ale câmpului vectorial $\overline{v}$ au atunci ecuaţiile

$$S(xy + z^2, x^2 + yz) = 0\,.$$

Definiţie 2.1.14. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar derivabil şi $M \in D$. **Gradientul câmpului** φ **în punctul** M este vectorul

$$(grad(\varphi))(M) = \frac{\partial\varphi(M)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial z}\overline{k}\,.$$

Funcţia $M \longmapsto (grad(\varphi))(M)$ se numeşte **câmpul gradient asociat câmpului scalar** φ.

Observaţie 2.1.15. Formal putem scrie

$$grad = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\,.$$

Propoziţie 2.1.16. *Dacă $\varphi, \psi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare derivabile, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ numere reale, $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie derivabilă, iar $\gamma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$ o aplicaţie diferenţiabilă, atunci*

1) $grad(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha grad(\varphi) + \beta grad(\psi)$.
2) $grad(\varphi\psi) = \varphi grad(\psi) + \psi grad(\varphi)$.
3) $grad(f \circ \varphi) = (f' \circ \varphi) grad(\varphi)$.
4) $grad(\varphi \circ \gamma) = (grad(\varphi) \circ \gamma) \cdot \gamma'$ *(unde* $\cdot$ *reprezintă produsul scalar al vectorilor din* $\mathbb{R}^3$*).*

Definiţie 2.1.17. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar derivabil, iar $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ un vector. **Derivata câmpului** φ **după direcţia vectorului** $\overline{u}$ este produsul scalar

$$\frac{d\varphi}{d\overline{u}} := grad(\varphi) \cdot \overline{u}\,.$$

Definiţie 2.1.18. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^2$. **Laplacianul câmpului** φ este atunci

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,.$$

Definiţie 2.1.19. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial derivabil, de componente v_1, v_2, v_3. **Divergenţa câmpului vectorial** $\overline{v}$ este câmpul scalar $div(\overline{v}) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definit prin

$$div(\overline{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\,.$$

Observaţie 2.1.20. Formal putem scrie

$$div = \overline{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \overline{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \overline{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Observaţie 2.1.21. Cu ajutorul operatorului *div* putem exprima laplacianul unui câmp scalar sub forma

$$\Delta(\varphi) = div(grad(\varphi))\,.$$

Definiţie 2.1.22. Rotorul unui câmp vectorial derivabil $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este câmpul vectorial $rot(\overline{v}) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin

$$rot(\overline{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\overline{k}\,.$$

Observaţie 2.1.23. Formal putem scrie

$$rot(\overline{v}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

De asemenea,

$$rot = \overline{i} \times \frac{\partial}{\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial}{\partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definiţie 2.1.24. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial derivabil, de componente v_1, v_2, v_3, iar $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ un vector. **Derivata câmpului vectorial** $\overline{v}$ **după direcţia** $\overline{u}$ este câmpul vectorial $\frac{d\overline{v}}{d\overline{u}} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin

$$\frac{d\overline{v}}{d\overline{u}} = \frac{dv_1}{d\overline{u}}\overline{i} + \frac{dv_2}{d\overline{u}}\overline{j} + \frac{dv_3}{d\overline{u}}\overline{k}.$$

2.2 Operatori diferenţiali şi formule integrale

2.2.1 Operatori diferenţiali

Observaţie 2.2.1. În analiza vectorială se utilizează frecvent operatorul ∇(citit "nabla") al lui Hamilton, definit prin

$$\nabla = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Cu ajutorul acestuia şi a unor exprimări formale conţi nând produse scalare şi vectoriale reprezenta într-un mod convenabil principalii operatori de derivare pe care i-am introdus pentru câmpuri scalare, respectiv vectoriale. Astfel, dacă $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este un câmp scalar, $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, iar $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ un

vector, avem:

$$\begin{aligned}
&grad(\varphi) = \nabla\varphi\\
&div(\overline{v}) = \nabla \cdot \overline{v}\\
&rot(\overline{v}) = \nabla \times \overline{v}\\
&\tfrac{d}{d\overline{u}} = \overline{u} \cdot \nabla\\
&\Delta(\varphi) = \nabla \cdot \nabla\varphi\,.
\end{aligned}$$

Observaţie 2.2.2. Vom utiliza operatorul nabla pentru a deduce expresii pentru gradientul, divergenţa sau rortorul unor produse de forma $\varphi\psi$, $\varphi\overline{v}$, $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{u} \times \overline{v}$, unde φ şi ψ sunt câpuri scalare, iar $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ - câmpuri vectoriale.

Astfel, au loc egalităţile

$$\begin{aligned}
&\nabla(\varphi\psi) = grad(\varphi\psi)\\
&\nabla(\overline{u} \cdot \overline{v}) = grad(\overline{u} \cdot \overline{v})\\
&\nabla \cdot (\varphi\overline{v}) = div(\varphi\overline{v})\\
&\nabla \times (\varphi\overline{v}) = rot(\varphi\overline{v})\\
&\nabla \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = div(\overline{u} \times \overline{v})\\
&\nabla \times (\overline{u} \times \overline{v}) = rot(\overline{u} \times \overline{v})
\end{aligned}$$

Ţinând cont de faptul că operatorul ∇ are proprietăţile unui operator de derivare în raport cu un produs, putem atunci scrie

$$\begin{aligned}
&grad(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla(\psi) + \psi\nabla(\varphi) = \varphi\, grad(\psi) + \psi\, grad(\varphi)\\
&div(\varphi\overline{v}) = \nabla \cdot (\varphi\overline{v}) = \varphi\, \nabla \cdot \overline{v} + \nabla\varphi \cdot \overline{v} = \varphi\, div(\overline{v}) + grad(\varphi) \cdot \overline{v}\\
&rot(\varphi\overline{v}) = \nabla \times (\varphi\overline{v}) = \varphi\, \nabla \times \overline{v} + \nabla\varphi \times \overline{v} =\\
&\quad = \varphi\, rot(\overline{v}) + grad(\varphi) \times \overline{v}\\
&grad(\overline{u} \cdot \overline{v}) = \nabla(\overline{u} \cdot \overline{v}) = \overline{u} \cdot \nabla\, \overline{v} + \overline{u} \times (\nabla \times \overline{v}) + \overline{v} \cdot \nabla\, \overline{u} +\\
&\quad + \overline{v} \times (\nabla \times \overline{u}) = \tfrac{d}{d\overline{u}}(\overline{v}) + \overline{u} \times rot(\overline{v}) + \tfrac{d}{d\overline{v}}(\overline{u}) + \overline{v} \times rot(\overline{u})\\
&div(\overline{u} \times \overline{v}) = \nabla \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{v} \cdot (\nabla \times \overline{u}) - \overline{u} \cdot (\nabla \times \overline{v}) =\\
&\quad = \overline{v} \cdot rot(\overline{u}) - \overline{u} \cdot rot(\overline{v})\\
&rot(\overline{u} \times \overline{v}) = \nabla \times (\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{v} \cdot \nabla\, \overline{u} - (\nabla \cdot \overline{u})\overline{v} - \overline{u} \cdot \nabla\, \overline{v} +\\
&\quad + (\nabla \cdot \overline{u})\overline{v} = \tfrac{d}{d\overline{v}}(\overline{u}) - grad(\overline{v})\overline{u} - \tfrac{d}{d\overline{u}}(\overline{v}) + grad(\overline{u})\overline{v}\,.
\end{aligned}$$

Propoziţie 2.2.3. *Dacă* $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar de două ori derivabil, iar* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un câmp vectorial de*

două ori derivabil, atunci

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \nabla\varphi = div(grad(\varphi)) = \Delta(\varphi)\\
&\nabla \times \nabla\varphi = rot(grad(\varphi)) = \overline{0}\\
&\nabla(\nabla \cdot \overline{v}) = grad(div(\overline{v})) = rot(rot(\overline{v})) - \Delta(\overline{v}) =\\
&\quad = \nabla \times (\nabla \times \overline{v}) - (\Delta(v_1), \Delta(v_2), \Delta(v_3))\\
&\nabla \cdot (\nabla \times \overline{v}) = div(rot(\overline{v})) = 0\,.
\end{aligned}$$

Definiţie 2.2.4. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de componente (v_1, v_2, v_3), $\Gamma \subseteq D$ o curbă, $S \subseteq D$ o porţiune de suprafaţă, iar $\Omega \subseteq D$ un domeniu compact, atunci integralele câmpului vectorial $\overline{v}$ pe acestea sunt vectorii

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma} \overline{v}(x,y,z)ds = \left(\int\limits_{\Gamma} v_1(x,y,z)ds\right)\overline{i} + \left(\int\limits_{\Gamma} v_2(x,y,z)ds\right)\overline{j} +\\
&\quad + \left(\int\limits_{\Gamma} v_3(x,y,z)ds\right)\overline{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S} \overline{v}(x,y,z)d\sigma = \left(\iint\limits_{S} v_1(x,y,z)d\sigma\right)\overline{i} + \left(\iint\limits_{S} v_2(x,y,z)d\sigma\right)\overline{j} +\\
&\quad \left(\iint\limits_{S} v_3(x,y,z)d\sigma\right)\overline{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega} \overline{v}(x,y,z)d\omega = \left(\iiint\limits_{\Omega} v_1(x,y,z)d\omega\right)\overline{i} + \left(\iiint\limits_{\Omega} v_2(x,y,z)d\omega\right)\overline{j} +\\
&\quad + \left(\iiint\limits_{\Omega} v_3(x,y,z)d\omega\right)\overline{k}
\end{aligned}$$

Definiţie 2.2.5. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este un câmp scalar, $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial, $P_0 \in D$. Dacă există şi sunt finite limitele

$$\lim_{\substack{\delta(\Omega) \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow P_0}} \frac{\iint_{\partial\Omega} \varphi\, d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\omega} \quad \text{, respectiv} \quad \lim_{\substack{\delta(\Omega) \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow P_0}} \frac{\iint_{\partial\Omega} \overline{v}\, d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\omega}\,,$$

acestea se numesc **derivata spaţială a câmpului scalar** φ, respectiv **a câmpului vectorial** $\overline{v}$ **în punctul** P_0.

Observaţie 2.2.6. Gradientul, divergenţa, respectiv rortorul pot fi definite ca operatori de derivare spaţială(câmpul vectorial $\overline{n}$ care apare mai jos reprezintă versorul normal pe suprafaţa pe care se efectuează integrarea):

$$(grad(\varphi))(P_0) = \lim_{\substack{\delta(\Omega) \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow P_0}} \frac{\iint_{\partial\Omega} \varphi\overline{n}\, d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\omega} ,$$

$$(div(\overline{v}))(P_0) = \lim_{\substack{\delta(\Omega) \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow P_0}} \frac{\iint_{\partial\Omega} \overline{n} \cdot \overline{v}\, d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\omega} ,$$

$$(rot(\overline{v}))(P_0) = \lim_{\substack{\delta(\Omega) \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow P_0}} \frac{\iint_{\partial\Omega} \overline{n} \times \overline{v}\, d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\omega} .$$

2.2.2 Formule integrale

Definiţie 2.2.7. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial, iar $\Gamma \subseteq D$ o curbă orientată închisă(un contur). **Circulaţia câmpului vectorial $\overline{v}$ de-a lungul conturului** Γ este

$$\oint_{\Gamma} \overline{v} \cdot d\overline{r} = \oint_{\Gamma} v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz ,$$

unde $d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$ este vectorul tangent la curba Γ în punctul (x, y, z)

Definiţie 2.2.8. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial şi $S \subseteq D$ o porţiune de suprafaţă orientată. **Fluxul câmpului vectorial $\overline{v}$ prin porţiunea de suprafaţă** S este

$$\iint_S \overline{n} \cdot \overline{v} d\sigma = \iint_S v_1 dydz + v_2 dzdx + v_3 dxdy ,$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei la suprafaţa S într-un punct (x, y, z).

Propoziţie 2.2.9. *(***formula lui Stokes***)*
Dacă $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial derivabil, iar S este o suprafaţă simplă orientată de clasă $\mathcal{C}^2$, cu conturul Γ, atunci circulaţia câmpului $\overline{v}$ de-a lungul lui Γ este egală cu fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin S:

$$\oint_{\Gamma} \overline{v} \cdot d\overline{r} = \iint_{S} \overline{n} \cdot \overline{v} d\sigma \,.$$

Propoziţie 2.2.10. *(***Formulele lui Green***)*
Fie $\varphi, \psi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ două câmpuri scalare de clasă $\mathcal{C}^2$, iar $\Omega \subseteq D$ un domeniu compact mărginit de suprafaţa închisă $S \subseteq D$, având normala $\overline{n}$ continuă. Atunci

$$\iint_{S} \varphi \frac{d\psi}{d\overline{n}} d\sigma = \iiint_{\Omega} (grad(\varphi) grad(\psi) + \varphi \Delta(\psi)) d\omega$$

(prima formulă a lui Green)
şi

$$\iint_{S} \left(\varphi \frac{d\psi}{d\overline{n}} - \psi \frac{d\varphi}{d\overline{n}} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi \Delta(\psi) - \psi \Delta(\varphi)) d\omega$$

(a doua formulă a lui Green).

Corolar 2.2.11. *Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^2$ şi $\Omega \subseteq D$ un domeniu compact mărginit de suprafaţa închisă $S \subseteq D$, cu normala $\overline{n}$ continuă. Pentru orice punct M din interiorul domeniul Ω, notând cu r câmpul scalar care dă distanţa unui punct faţă de punctul M, avem*

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\overline{n}} - \varphi \frac{d}{d\overline{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta(\varphi) d\omega \,.$$

2.3 Câmpuri particulare

2.3.1 Câmpuri armonice

Definiţie 2.3.1. Un câmp scalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^2$ se numeşte **câmp armonic**(sau **funcţie armonică**) dacă verifică ecuaţia lui Laplace: $\Delta(f) = 0$ în domeniul D.

Propoziţie 2.3.2. *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar armonic, iar* $S \subseteq D$ *este o suprafaţă închisă, cu normala* $\overline{n}$*, care inchide domeniul compact* Ω_S*, atunci*

$$\iint\limits_S \frac{df}{d\overline{n}} d\sigma = 0$$

$$\iint\limits_S f \frac{df}{d\overline{n}} d\sigma = \iiint\limits_{\Omega_S} (grad(f))^2 d\omega\,.$$

Propoziţie 2.3.3. *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar armonic,* $S \subseteq D$ *este o suprafaţă închisă, cu normala* $\overline{n}$*, care inchide domeniul compact* Ω_S*,* $M \in \Omega_S$ *un punct oarecare fixat, iar* r *este câmpul scalare dat de distanţa faţă de punctul* M*, atunci*

$$f(M) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{r} \frac{df}{d\overline{n}} - f \frac{d}{d\overline{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma\,.$$

Propoziţie 2.3.4. *(***teorema de medie a lui Gauss***)*
Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar armonic,* $M \in D$ *un punct oarecare fixat, iar* $S = \mathcal{S}(M, \rho)$ *sfera de rază* ρ *centrată în punctul* M*, atunci*

$$f(M) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_S f(P) d\sigma\,.$$

Corolar 2.3.5. *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar armonic, funcţia* f *nu poate avea puncte de extrem în interiorul domeniului* D*.*

Corolar 2.3.6. *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este un câmp scalar armonic pe un domeniu compact* $\Omega \subseteq D$*, mărginit de suprafaţa închisă* S*,* f *este continuă pe* $\Omega \cup S$ *şi nulă pe* S*, iar* $\frac{df}{d\overline{n}}$ *este mărginită pe* S*, atunci* f *este nulă pe* Ω*.*

Corolar 2.3.7. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *două câmpuri scalare armonice pe un domeniu compact* $\Omega \subseteq D$*, mărginit de suprafaţa*

închisă S, cu proprietatea că $\frac{df}{d\overline{n}}$ şi $\frac{dg}{d\overline{n}}$ sunt mărginite pe S, iar f şi g coincid pe S, atunci f şi g coincid pe Ω. În particular, o funcţie armonică într-un domeniu, cu derivatele pe direcţiile normale la frontieră mărginite, este complet determinată în acest domeniu.

Propoziţie 2.3.8. *Dacă $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie armonică pe întreg spaţiul, cu proprietatea că există $R, M, \alpha > 0$ şi un punct $O \in \mathbb{R}^3$ astfel încât*

$$|f(P)| < \frac{M}{\rho^\alpha} \quad , (\forall)P : |OP| = \rho > R \, ,$$

atunci $f(M) = 0$, $(\forall)M \in \mathbb{R}^3$.

Propoziţie 2.3.9. *Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este un câmp scalar armonic pe un domeniu compact $\Omega \subseteq D$, mărginit de suprafaţa închisă S, iar $\frac{df}{d\overline{n}} = 0$ pe S, atunci f este constantă pe Ω.*

Corolar 2.3.10. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ două câmpuri scalare armonice pe un domeniu compact $\Omega \subseteq D$, mărginit de suprafaţa închisă S, cu proprietatea că $\frac{df}{d\overline{n}} = \frac{dg}{d\overline{n}}$ pe S. Atunci f şi g diferă printr-o constantă pe Ω. În particular, o funcţie armonică pe un domeniu compact este determinată până la o constantă aditivă de valorile derivatei sale pe direcţia normalei la frontiera domeniului.*

2.3.2 Câmpuri irotaţionale

Definiţie 2.3.11. Un câmp vectorial derivabil $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se numeşte **câmp irotaţional pe domeniul** $\Omega \subseteq D$ dacă satisface condiţia $rot(\overline{v}) = \overline{0}$ pe Ω.

Definiţie 2.3.12. Un domeniu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se numeşte **conex** dacă nu poate fi acoperit de două mulţimi deschise disjuncte $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$(Prin **mulţime deschisă în** $\mathbb{R}^3$ înţelegem o mulţime care odată cu orice punct al său conţine şi o bilă centrată în acel punct). Domeniul conex Ω se numeşte **simplu conex** dacă pentru orice curbă închisă

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ există o funcţie continuă $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ cu proprietatea că

$$\begin{array}{l} F(0,t) = \gamma(t),\ (\forall)t \in [0,1] \\ F(1,t) = \gamma(0) = \gamma(1),\ (\forall)t \in [0,1]\,. \end{array}$$

Observaţie 2.3.13. Domeniul conex Ω este simplu conex dacă pentru orice curbă închisă $\Gamma \subseteq \Omega$ există o suprafaţă $S \subseteq \Omega$ cu proprietatea că Γ este bordul lui S.

Definiţie 2.3.14. Un domeniu conex care nu este simplu conex se numeşte **multiplu conex**.

Propoziţie 2.3.15. *Fie* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un câmp irotaţional în domeniul simplu conex* $\Omega \subseteq D$*. Atunci circulaţia câmpului* $\overline{v}$ *de-a lungul oricărei curbe închise* $\Gamma \subseteq \Omega$ *este nulă.*

Corolar 2.3.16. *Dacă* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un câmp irotaţional în domeniul simplu conex* $\Omega \subseteq D$*, iar* $A, B \in \Omega$ *sunt două puncte oarecare fixate, circulaţia câpului* $\overline{v}$ *este aceeaşi de-a lungul oricărei curbe* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ *cu proprietatea că că* $\gamma(0) = A$ *şi* $\gamma(1) = B$*.*

Propoziţie 2.3.17. *Fie* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un câmp irotaţional în domeniul simplu conex* $\Omega \subseteq D$*. Atunci există un câmp scalar* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, astfel încât* $\overline{v} = grad(f)$*.*

Observaţie 2.3.18. $O \in \Omega$ fiind un punct oarecare fixat, o funcţie f cu proprietatea din propoziţia de mai sus se obţine prin

$$f(M) = \int_{\gamma_{O,M}} \overline{v} \cdot d\overline{r}\,,$$

integrala fiind de-a lungul unui drum $\gamma_{O,M} : [0,1] \longrightarrow \Omega$ cu proprietatea că $\gamma_{O,M}(0) = O$ şi $\gamma_{O,M}(1) = M$. Circulaţia câmpului $\overline{v}$ pe orice curbă care uneşte două puncte $A, B \in \Omega$ este atunci dată de $f(B) - f(A)$.

2.3.3 Câmupri solenoidale

Definiţie 2.3.19. Un câmp vectorial derivabil $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se numeşte **câmp solenoidal pe domeniul** $\Omega \subseteq D$ dacă satisface condiţia $div(\overline{v}) = 0$ pe Ω.

Propoziţie 2.3.20. *Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp solenoidal pe domeniul Ω, iar $S \subseteq \Omega$ o suprafaţă închisă. Fluxul câmpului $\overline{v}$ prin suprafaţa S este atunci nul.*

Definiţie 2.3.21. Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp de vectori, iar $S \subseteq D$ o supraţă mărginită de o curbă închisă Γ. Interiorul suprafeţei de câmp S_l, generată de liniile de câmp ale câmpului $\overline{v}$ care trec prin punctele curbei Γ, se numeşte **tub de vectori al câmpului** $\overline{v}$.

Propoziţie 2.3.22. *Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp solenoidal pe domeniul $\Omega \subseteq D$, iar $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ două secţiuni ale unui tub de vectori al câmpului $\overline{v}$ situat în domeniul Ω. Fuxurile câmpului $\overline{v}$ prin cele două suprafeţe S_1 şi S_2 sunt atunci egale.*

Definiţie 2.3.23. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu şi $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ două suprafeţe mărginite de o aceeaşi curbă închisă Γ. Spunem că normala $\overline{n_2}$ la suprafaţa S_2 bf se obţine prin continuitate din normala $\overline{n_1}$ la suprafaţa S_1 dacă pentru orice puncte $M_1 \in S_1$ şi $M_2 \in S_2$ există o curbă γ_{M_1,M_2} de clasă $\mathcal{C}^1$ astfel încât produsele scalare ale tangentelor la γ_{M_1,M_2} în M_1, respectiv M_2, cu normalele la S_1, respectiv S_2 au acelaşi semn. Dacă domeniul Ω_0 cuprins între suprafeţele S_1 şi S_2 este inclus în domeniul Ω, iar normalele la cele două suprafeţe se obţin una din alta prin continuitate, spunem că suprafeţele S_1 şi S_2 sunt **echivalente**.

De asemenea, se numesc **echivalente** două suprafeţe închise S_1 şi S_2 cu proprietatea că una dintre ele o înconjoară pe cealaltă, sunt incluse în Ω împreună cu domeniul cuprins între ele, iar normalele lor se obţin una din alta prin continuitate.

Propoziţie 2.3.24. *Fie $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp solenoidal pe domeniul $\Omega \subseteq D$, iar $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ două suprafeţe echivalente. Fluxurile câmpului $\overline{v}$ prin suprafeţele S_1 şi S_2 sunt atunci egale.*

Propoziţie 2.3.25. *Dacă* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *este un câmp solenoidal pe domeniul* $\Omega \subseteq D$*, atunci există un câmp vectorial* $\overline{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *astfel încât* $\overline{v} = rot(\overline{u})$

2.3.4 Câmpuri biscalare

Definiţie 2.3.26. Un câmp vectorial $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se numeşte **câmp biscalar**, atunci când există două câmpuri scalare $\varphi, \psi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{v} = \varphi grad(\psi)\,.$$

Propoziţie 2.3.27. *Dacă* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *este un câmp biscalar, atunci*

$$\overline{v} \cdot rot(\overline{v}) = 0\,,$$

adică $\overline{v}$ *este ortogonal pe câmpul său rotor.*

Propoziţie 2.3.28. *Fie* $\overline{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un câmp biscalar. Atunci* $\overline{v}$ *admită o familie de suprafeţe ortogonale liniilor sale de câmp. Reciproc, dacă un câmp vectorial* $\overline{v}$ *admite o familie de suprafeţe ortogonale liniilor sale de câmp, atunci* $\overline{v}$ *este irotaţional sau biscalar.*

2.4 Probleme propuse

Problema 2.1. Să se calculeze gradienţii funcţiilor:
$F_1 = (\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{r}) + \overline{a} \cdot \overline{r},\ F_2 = (\overline{a} \cdot \overline{r})^3,\ F_3 = f(r^3),\ F_4 = e^{f(\overline{a} \cdot \overline{r})},$
$F_5 = (\overline{a} \times \overline{r}) \cdot (\overline{b} \times \overline{r}),\ F_6 = |\overline{a} \times \overline{r}|.$

Problema 2.2. Să se calculeze gradientul câmpului $u = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3xz^2 = 12xz - 6y^2$ şi să se determine punctele în care acesta este:
a) perpendicular pe axa Ox.
b) paralel cu axa Oy.
c) egal cu zero.

Problema 2.3. Să se calculeze derivata câmpului vectorial $\overline{w} = (x^2 - yz)\overline{i} + (y^2 - xz)\overline{j} + (z^2 - xy)\overline{k}$ după direcţia vectorului $(1, 2, 2)$.

Problema 2.4. Să se determine liniile de câmp ale câmpurilor vectoriale:
a) $\overline{w} = \overline{a} \times (\overline{b}r + \overline{r})$.
b) $\overline{w} = -(\overline{a} \cdot \overline{r})(\overline{b} \times \overline{c}) + (\overline{b} \cdot \overline{r})(\overline{c} \times \overline{a}) + (\overline{c} \cdot \overline{r})(\overline{a} \times \overline{b})$.
c) $\overline{w} = x\overline{i} + y\overline{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\overline{k}$.
d) $\overline{w} = (xy - 2z^2)\overline{i} + (4xz - y^2)\overline{j} + (yz - 2x^2)\overline{k}$.
e) $\overline{w} = (4x + y - 2z)\overline{i} + (-x + 2y + 6z)\overline{j} + (2x + 2y + z)\overline{k}$.

Problema 2.5. Determinaţi suprafeţele de câmp ale câmpurilor vectoriale următoare care conţin curba γ dată:
a) $\overline{w} = (x^2 + y^2)\overline{i} + 2xy\overline{j} + xz\overline{k},\ \gamma : \begin{cases} x = a \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}.$
b) $\overline{w} = 2yz\overline{i} - xz\overline{j} - xy\overline{k},\ \gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases}.$
c) $\overline{w} = [b(x+y) - c(x+z)]\overline{i} + [c(y+z) - a(y+x)]\overline{j} + [a(z+x) - b(z+y)]\overline{k}$, $\gamma : ax = by = cz$..
d) $\overline{w} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{r}}{r^2}(\overline{a} \times \overline{r}) - \frac{\overline{b} \cdot \overline{r}}{r^2}(\overline{b} \times \overline{r}) - \frac{\overline{b} \cdot \overline{r}}{\overline{a} \cdot \overline{r}}(\overline{a} \times \overline{b}),\ \gamma : \begin{cases} r = h \\ \overline{b} \cdot \overline{r} = 0 \end{cases}.$

Problema 2.6. Să se calculeze:
$div((\overline{a} \cdot \overline{r})\overline{r}),\ rot((\overline{a} \cdot \overline{r})\overline{r}),\ div(\overline{a} \times (\overline{a} \times \overline{r})),\ rot(\overline{r} \times (\overline{a} \times \overline{r})),\ div(\frac{\overline{a} \cdot \overline{r}}{r^m}\overline{r}),$
$rot((\overline{a} \times \overline{r}) \cdot (\overline{b} \times \overline{r})\overline{r}),\ div((\overline{a} \times \overline{r}) \cdot (\overline{b} \times \overline{r})\overline{r}).$

Problema 2.7. Demonstraţi identităţile următoare, dacă $\overline{r}$ este vectorul de poziţie, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - vectori constanţi, $\overline{u}, \overline{v}$ - câmpuri vectoriale, iar F - câmp scalar:
a) $(\overline{u}\nabla)\overline{r} = \overline{u}$.
b) $(\overline{v}\nabla)F\overline{u} = \overline{u}(\overline{v} \cdot grad(F)) + F(\overline{v}\nabla)\overline{u}$.
c) $(\overline{a}\nabla)(\overline{u} \times \overline{v}) = -\overline{v} \times (\overline{a}\nabla)\overline{u} + \overline{u} \times (\overline{a}\nabla)\overline{v}$.
d) $\overline{a} \cdot grad(\overline{u} \cdot \overline{v}) = \overline{u}(\overline{a}\nabla)\overline{v} + \overline{v}(\overline{a}\nabla)\overline{u}$.
e) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot rot(\overline{u}) = \overline{b} \cdot (\overline{a}\nabla)\overline{u} - \overline{a} \cdot (\overline{b}\nabla)\overline{u}$.
f) $(\overline{u} \times \nabla) \times \overline{v} = (\overline{u}\nabla)\overline{v} + \overline{u} \times rot(v) - \overline{u}div(\overline{v})$.
g) $(\nabla \times \overline{u}) \times \overline{v} = -\overline{v} \times rot(\overline{u}) + \overline{u}div(\overline{v}) - \overline{u} \times rot(\overline{v}) - (\overline{u}\nabla)\overline{v}$.

Problema 2.8. Să se calculeze laplacianul funcţiilor:
$F = (\overline{a} \times \overline{r}) \cdot (\overline{b} \times \overline{r})$, $\overline{w}_1 = (\overline{a} \times \overline{r}) \times (\overline{b} \times \overline{r})$, $\overline{w}_2 = (\overline{r} \times (\overline{a} \times \overline{r})) \times \overline{r}$.

Problema 2.9. Să se verifice identităţile:
a) $\Delta(FG) = F\Delta(G) + G\Delta(F) + 2grad(F) \cdot grad(G)$.
b) $\Delta(F^m) = mF^{m-2}(F\Delta(F) + (m-1)grad(F))$.
c) $\Delta(ln(F)) = \frac{1}{F}\Delta(F) - \left(\frac{1}{F}grad(F)\right)^2$.
d) $\Delta(e^F) = e^F(\Delta(F) + (grad(F))^2)$.

Problema 2.10. Să se calculeze fluxul câmpului $\overline{w} = x(xy+az)\overline{i} - y(xy-az)\overline{j} + z^3\overline{k}$ prin suprafaţa $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Capitolul 3

Funcţii complexe

3.1 Funcţii olomorfe. Definiţie şi proprietăţi elementare

3.1.1 Corpul numerelor complexe

Propoziţie 3.1.1. *Corpul* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *al numerelor reale este un corp complet ordonat.*

Demonstraţie. Operaţia de adunare a numerelor reale are proprietăţile

$$\begin{aligned}&(a+b)+c = a+(b+c)\\&a+b = b+a\\&a+0 = 0+a = a\\&a+(-a) = (-a)+a = 0\,,\end{aligned}$$

astfel că $(\mathbb{R}, +)$ este un grup abelian. În ceea ce priveşte operaţia de înmulţire,

$$\begin{aligned}&(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\\&a\cdot b = b\cdot a\\&a\cdot 1 = 1\cdot a = a\\&a\cdot 0 = 0\cdot a = 0\\&a\cdot \tfrac{1}{a} = \tfrac{1}{a}\cdot a = 1,\ (\forall)a \neq 0\,,\end{aligned}$$

astfel că $(\mathbb{R}, \cdot)$ este un monoid comutativ cu element absorbant 0, iar $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ este un grup comutativ. În plus, înmulţirea este distributivă faţă de adunare

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,,$$

şi rezultă că $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ. De asemenea, relaţia de ordine naturală $\leq$, care este una totală(pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem una din situaţiile $a = b$, $a < b$ sau $a > b$), este compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire:

$$\begin{aligned} &a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c,\ (\forall) c \in \mathbb{R}\,,\\ &a \leq b \Longrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c,\ (\forall) c \geq 0\,. \end{aligned}$$

Prin urmare, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ ordonat. În plus, acesta este un corp complet, deoarece orice şir fundamental este convergent. Prin *şir fundamental* se înţelege un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că

$$(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \, |x_m - x_n| < \varepsilon,\ (\forall) m, n \geq n_\varepsilon\,.$$

Prin urmare, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ ordonat complet. În plus, $(\mathbb{R}, \leq)$ verifică axioma marginii superioare: *orice submulţime de numere reale are un supremum.* □

Definiţie 3.1.2. Pe mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a perechilor de numere reale se pot defini operaţiile

$$\begin{aligned} &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,,\\ &(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\,. \end{aligned}$$

Prin mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ înţelegem mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ împrună cu aceste două operaţii.

Propoziţie 3.1.3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *este un corp comutativ, în care* $\mathbb{R}$ *se scufundă izomorf.*

Demonstraţie. Evident, au loc egalităţile

$$
\begin{aligned}
&(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)\,;\\
&((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)=\\
&=(a+c+e,b+d+f)=(a,b)+(c+e,d+f)=\\
&=(a,b)+((c,d)+(e,f))\,;\\
&(a,b)+(0,0)=(a,b)=(0,0)+(a,b)\,;\\
&(a,b)+(-a,-b)=(0,0)=(-a,-b)+(a,b)\,;\\
&(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=\\
&=(c,d)\cdot(a,b)\,;\\
&((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=\\
&=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=\\
&=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))\,;\\
&(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)=(1,0)\cdot(a,b)\,;\\
&(a,b)\cdot(\tfrac{a}{a^2+b^2},\tfrac{-b}{a^2+b^2})=(1,0),\ (\forall)(a,b)\neq(0,0)\,;\\
&(a,b)\cdot((c,d)+(e,f))=(a,b)\cdot(c+e,d+f)=\\
&=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)=\\
&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)=\\
&=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\,.
\end{aligned}
$$

Rezultă că $(\mathbb{C},+,\cdot)$ este un corp comutativ. În plus, funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ definită prin $f(a)=(a,0)$, $(\forall)a\in\mathbb{R}$ este injectivă şi verifică egalităţile

$$
\begin{aligned}
&f(a+b)=(a+b,0)=(a,0)+(b,0)=f(a)+f(b)\,;\\
&f(a\cdot b)=(ab,0)=(a,0)\cdot(b,0)=f(a)\cdot f(b)\,;\\
&f(1)=(1,0)\,,
\end{aligned}
$$

care arată că f este un morfism de corpuri. □

Observaţie 3.1.4. Folosind morfismul injectiv f vom identifica fiecare număr real $a\in\mathbb{R}$ cu imaginea sa $f(a)$ prin morfismul f. Ţinând cont de identitatea

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\,,$$

notând $i=(0,1)$, rezultă că fiecare număr complex $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ poate fi scris sub forma

$$z=(a,b)=a+b\cdot i\,,$$

numită *forma algebrică a numărului complex z*. Numărul real a se numeşte în acest caz *partea reală a numărului complex z*, şi notăm $a = Re(z)$, iar numărul real b se numeşte *partea imaginară a numărului complex z*, notată $b = Im(z)$. Numărul i se numeşte *unitatea imaginară* şi verifică egalitatea

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Numerele complexe de forma $(0,b) = b \cdot i$, a căror parte reală este nulă, se numesc *numere complexe pur imaginare*. Mulţimea $\mathbb{R} \cdot i$ se numeşte *mulţimea numerelor complexe pur imaginare*.

Observaţie 3.1.5. Datorită egalităţii $i^2 = -1$, pe corpul numerelor complexe nu se poate defini o relaţie de ordine compatibilă cu operaţiile.

Definiţie 3.1.6. Fie $z = a + b \cdot i$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, un număr complex. Numărul real

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

se numeşte **modulul numărului complex** z, notat $|z|$.

Propoziţie 3.1.7. *Pentru orice numere complexe $z, w \in \mathbb{C}$ au loc următoarele proprietăţi:*

$$\begin{array}{ll} 1) & |z| \geq 0\,; \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0\,; \\ 2) & |z + w| \leq |z| + |w|\,; \\ 3) & |z \cdot w| = |z| \cdot |w|\,. \end{array}$$

Demonstraţie. Fie $z = a + b \cdot i, w = c + d \cdot i \in \mathbb{C}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, două numere complexe oarecare. Atunci

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

şi

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0 \Longleftrightarrow z = 0\,.$$

De asemenea,

$$\begin{array}{l} |z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) \leq \\ \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = (|z| + |w|)^2 \end{array},$$

de unde rezultă inegalitatea $|z+w| \leq |z| + |w|$. În fine, avem

$$\begin{aligned}&|z \cdot w|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2\end{aligned}$$

şi rezultă că $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. □

Observaţie 3.1.8. Inegalitatea $|z+w| \leq |z|+|w|$ se numeşte *inegalitatea modulului.* Din ea se pot deduce următoarele inegalităţi:

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w| \quad , (\forall) z, w \in \mathbb{C}\,.$$

Definiţie 3.1.9. Dacă $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, este un număr complex, numărul complex

$$a - b \cdot i$$

se numeşte **conjugatul numărului complex** z, notat $\overline{z}$.

Propoziţie 3.1.10. *Pentru orice numere complexe $z, w \in \mathbb{C}$ au loc următoarele proprietăţi:*

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{z}} = z\,;\\ &\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,;\\ &\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.\end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $z = a + b \cdot i, w = c + d \cdot i \in \mathbb{C}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, două numere complexe oarecare. Atunci

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a - b \cdot i} = a - (-b) \cdot i = a + b \cdot i = z$$

şi

$$\begin{aligned}&\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d) \cdot i} = (a+c) - (b+d) \cdot i = \\ &= a - b \cdot i + c - d \cdot i = \overline{z} + \overline{w}\,.\end{aligned}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned}&\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc) \cdot i} = (ac-bd) - (ad+bc) \cdot i = \\ &= (a - b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i) = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.\end{aligned}$$

□

Observaţie 3.1.11. Pentru orice număr complex $z \in \mathbb{R}$ au loc proprietăţile:

$$\begin{aligned}
&Re(z) = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z})\,;\\
&Im(z) = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z})\,;\\
&z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}\,;\\
&z \in \mathbb{R} \cdot i \Longleftrightarrow z = -\overline{z}\,.
\end{aligned}$$

Corolar 3.1.12. *Aplicaţia de conjugare $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \overline{z}$ este un automorfism al corpului numerelor complexe. În plus, acesta acţionează identic pe corpul numerelor reale.*

Definiţie 3.1.13. O aplicaţie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numeşte
- **aditivă** $\Longleftrightarrow f(z + w) = f(z) + f(w)$, $(\forall) z, w \in \mathbb{C}$;
- $\mathbb{R}-$**omogenă** $f(\alpha z) = \alpha f(z)$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$;
- $\mathbb{C}-$**omogenă** $f(\lambda z) = \lambda f(z)$, $(\forall)\lambda, z \in \mathbb{C}$;
- $\mathbb{R}-$**liniară** $\Longleftrightarrow f$ este aditivă şi $\mathbb{R}-$omogenă;
- $\mathbb{C}-$**liniară** $\Longleftrightarrow f$ este aditivă şi $\mathbb{C}-$omogenă.

Propoziţie 3.1.14. *O aplicaţie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ este $\mathbb{R}-$liniară dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât*

$$f(z) = a \cdot Re(z) + b \cdot Im(z) \quad , (\forall) z \in \mathbb{C}\,.$$

Aplicaţia f este $\mathbb{C}-$liniară dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f(z) = \lambda z \quad , (\forall) z \in \mathbb{C}\,.$$

O aplicaţie $\mathbb{R}-$liniară este $\mathbb{C}-$liniară dacă şi numai dacă

$$Re(f(1)) = Im(f(i))\,, \quad Im(f(1)) = -Re(f(i))\,.$$

Demonstraţie. Dacă f este $\mathbb{R}-$liniară, atunci

$$\begin{aligned}
&f(z) = f(Re(z) + Im(z) \cdot i) = f(Re(z)) + f(Im(z) \cdot i) =\\
&= Re(z) \cdot f(1) + Im(z) \cdot f(i)\,.
\end{aligned}$$

Reciproc, dacă există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f(z) = a \cdot Re(z) + b \cdot Im(z),\ (\forall) z \in \mathbb{C}\,,$$

atunci

$$\begin{aligned} f(z+w) &= a\cdot Re(z+w)+b\cdot Im(z+w) = \\ &= a\cdot Re(z)+b\cdot Im(z)+a\cdot Re(w)+b\cdot Im(w) = \\ &= f(z)+f(w) \quad , (\forall) z,w\in\mathbb{C}\,, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} f(\alpha z) &= a\cdot Re(\alpha z)+b\cdot Im(\alpha z) = \\ &= \alpha(a\cdot Re(z)+b\cdot Im(z)) = \\ &= \alpha f(z) \quad , (\forall)\alpha\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Dacă f este $\mathbb{C}-$liniară, atunci f este $\mathbb{R}-$liniară, iar $f(i)=if(1)$, astfel că

$$\begin{aligned} f(z) &= Re(z)\cdot f(1)+Im(z)\cdot f(i) = \\ &= Re(z)\cdot f(1)+Im(z)\cdot if(1) = f(1)\cdot z \quad , (\forall) z\in\mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Reciproc, dacă există $\lambda\in\mathbb{C}$ cu $f(z)=\lambda z$, $(\forall)z\in\mathbb{C}$, atunci

$$f(z+w)=\lambda(z+w)=\lambda z+\lambda w=f(z)+f(w)$$

şi

$$f(\mu z)=\lambda\mu z=\mu\lambda z=\mu f(z)\,.$$

Dacă funcţia f este $\mathbb{C}-$liniară, f este $\mathbb{R}-$liniară, iar din egalitatea $f(i)=if(1)$ rezultă relaţiile

$$Re(f(1))=Im(f(i))\,, \quad Im(f(1))=-Re(f(i))\,.$$

Reciproc, dacă f este $\mathbb{R}-$liniară, iar $Re(f(1))=Im(f(i))$ şi $Im(f(1))=-Re(f(i))$, atunci

$$f(i)=Re(f(i))+i\cdot Im(f(i))=-Im(f(1))+i\cdot Re(f(1))=i\cdot f(1)\,,$$

astfel că

$$\begin{aligned} f(z) &= Re(z)\cdot f(1)+Im(z)\cdot f(i) = \\ &= Re(z)\cdot f(1)+Im(z)\cdot if(1) = f(1)\cdot z \quad , (\forall) z\in\mathbb{C} \end{aligned}$$

şi f este deci $\mathbb{C}-$liniară. $\square$

3.1.2 Topologia mulţimii $\mathbb{C}$

Propoziţie 3.1.15. *Pentru orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ au loc proprietăţile:*

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2\,;$$
$$|z| = |\overline{z}|\,;$$
$$-|z| \leq Re(z), Im(z) \leq |z|\,.$$

Demonstraţie. Dacă $z = a + b \cdot i$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, atunci

$$z \cdot \overline{z} = a \cdot a - b \cdot (-b) + (a \cdot (-b) + a \cdot b) \cdot i = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$

Evident, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$. Cum

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 \geq Re(z)^2, Im(z)^2\,,$$

rezultă că $|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|$, de unde

$$-|z| \leq Re(z), Im(z) \leq |z|\,.$$

$\square$

Definiţie 3.1.16. Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime nevidă oarecare. O aplicaţie $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface condiţiile:
1) $d(x, y) \geq 0$, $(\forall)x, y \in X$;
2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall)x, y \in X$;
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $(\forall)x, y, z \in X$,
se numeşte **metrică** sau **distanţă** pe mulţimea X, iar perechea (X, d) se numeşte în acest caz *spaţiu metric.*

Folosind proprietăţile modulului, se verifică imediat următoarea

Propoziţie 3.1.17. *Funcţia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin $d(z, w) = |z - w|$ determină pe mulţimea numerelor complexe o structură de spaţiu metric.*

Definiţie 3.1.18. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un număr complex oarecare şi $r \in \mathbb{R}$, cu $r > 0$. **Discul deschis de rază r centrat în z_0** este mulţimea

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| < r\}\,,$$

iar **discul închis de rază r centrat în z_0** este

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \leq r\}\,.$$

Definiţie 3.1.19. Fie $M \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime nevidă de numere complexe şi $z \in \mathbb{C}$ un număr complex oarecare. Spunem că M **este o vecinătate a lui** z dacă există $r > 0$, astfel încât $D(z, r) \subseteq M$. Notăm cu $\mathcal{V}(z)$ mulţimea vecinătăţilor numărului complex z.

Definiţie 3.1.20. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ şi $z \in \mathbb{C}$ oarecare. Spunem că numărul complex z este
-punct interior al lui $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \in \mathcal{V}(z)$;
-punct aderent al lui $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap V \neq \emptyset$, $(\forall) V \in \mathcal{V}(z)$;
-punct frontieră al lui $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap V \neq \emptyset \neq V \setminus A$, $(\forall) V \in \mathcal{V}(z)$;
-punct de acumulare al lui $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap V \setminus \{z\} \neq \emptyset$, $(\forall) V \in \mathcal{V}(z)$;
-punct izolat al lui $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists) V \in \mathcal{V}(z) :\, A \cap V = \{z\}$.

Definiţie 3.1.21. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime de numere complexe. **Interiorul lui** A este

$$\overset{\circ}{A} = \{z \in \mathbb{C} |\, z - \text{punct interior al lui } A\}\,.$$

Închiderea sau **aderenţa** mulţimii A este

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} |\, z - \text{punct aderent al lui } A\}\,.$$

Frontiera mulţimii A este

$$Fr(A) = \{z \in \mathbb{C} |\, z - \text{punct frontieră al lui } A\}\,.$$

Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A este

$$A' = \{z \in \mathbb{C} |\, z - \text{punct de acumulare al lui } A\}\,.$$

Mulţimea punctelor izolate ale lui A este

$$Iz(A) = \{z \in \mathbb{C} |\, z - \text{punct izolat al lui } A\}\,.$$

Observaţie 3.1.22. Din definiţii rezultă imediat următoarele relaţii

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{A}\subseteq A\subseteq \overline{A}\\&Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{C}\setminus A}\\&Iz(A)\subseteq A\\&\overline{A}=A'\cup Iz(A)\end{aligned}$$

Definiţie 3.1.23. Spunem că un şir de numere complexe $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este **convergent către numărul complex** $z\in\mathbb{C}$ dacă pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(z)$ există un rang $n_V\in\mathbb{N}$, astfel încât $z_n\in V$, $(\forall)n\geq n_V$. Numărul z se numeşte în acest caz **limita** şirului $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, şi notăm $z=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

Observaţie 3.1.24. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ dacă şi numai dacă au loc relaţiile $\lim\limits_{n\to\infty} Re(z_n)=Re(z)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} Im(z_n)=Im(z)$.
2) Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent este ca $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie fundamental.

Observaţie 3.1.25. Pentru orice submulţime nevidă $A\subseteq\mathbb{C}$ au loc echivalenţele:
1) $z\in\overline{A}\Longleftrightarrow(\exists)(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A:\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
2) $z\in A'\Longleftrightarrow(\exists)(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{z\}:\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
3) $z\in\overset{\circ}{A}\Longleftrightarrow\not\exists(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}\setminus A:\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.

Observaţie 3.1.26. Spunem că un şir de numere complexe $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** ∞ dacă $|z_n|\longrightarrow\infty$ în $\mathbb{R}$.

Definiţie 3.1.27. O mulţime $M\subseteq\mathbb{C}$ se numeşte **mărginită** dacă există $r>0$ astfel încât $M\subseteq D(0,r)$

Propoziţie 3.1.28. *O mulţime $M\subseteq\mathbb{C}$ este mărginită dacă şi numai dacă pentru orice $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$ şi orice şir $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că $w_n\longrightarrow 0$ rezultă că $w_nz_n\longrightarrow 0$.*

Demonstraţie. Dacă M este mărginită, atunci există $r > 0$ cu $M \subseteq D(0,r)$. Rezca $|z| < r$, $(\forall) z \in M$. Dacă acum $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ şi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că $w_n \to 0$, atunci $|w_n| \to 0$ şi

$$|w_n z_n| \leq r|w_n|\,,$$

astfel că $w_n z_n \longrightarrow 0$.

Reciproc, dacă M nu este mărginită, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $z_n \in M \setminus D(0,n)$. Rezca $|z_n| \geq n$, astfel că deşi $\frac{1}{n} \to 0$, avem că

$$|\frac{1}{n} z_n| \geq 1\,,$$

deci $\frac{1}{n} z_n \not\to 0$. □

Propoziţie 3.1.29. *O mulţime $M \subseteq \mathbb{C}$ este mărginită dacă şi numai dacă proiecţiile sale $Re(M) = \{Re(z) |\, z \in M\}$ şi $Im(M) = \{Im(z) |\, z \in M\}$ sunt mărginite.*

Demonstraţie. Dacă $M \subseteq D(0,r)$, atunci au loc în mod evident incluziunile $Re(M), Im(M) \subseteq (-r,r)$.

Reciproc, dacă $Re(M) \subseteq (-\alpha,\alpha)$ şi $Im(M) \subseteq (-\beta,\beta)$, atunci $M \subseteq D(0, \sqrt{\alpha^2+\beta^2})$. □

Definiţie 3.1.30. Un şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte **mărginit** dacă mulţimea elementelor sale este mărginită.

Propoziţie 3.1.31. *Orice şir convergent este mărginit.*

Propoziţie 3.1.32. *Orice şir mărginit are un subşir convergent.*

Definiţie 3.1.33. Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, iar $z_0 \in A'$ un punct de acumulare al său. Spunem că funcţia f **are limită în punctul** z_0 dacă există $l \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ cu proprietatea că pentru orice $U \in \mathcal{V}(l)$ există $V \in \mathcal{V}(z_0)$ cu proprietatea că $f(A \cap V \setminus \{z_0\}) \subseteq U$. Notăm în acest caz $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$.

Propoziţie 3.1.34. *Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ are în punctul $z_0 \in A'$ limita $l \in \mathbb{C}$ dacă şi numai dacă funcţiile $Re(f)$ şi $Im(f)$ au în punctul z_0 limitele $Re(l)$, respectiv $Im(l)$. f are în punctul z_0 limita ∞ dacă şi numai dacă $|f|$ are limita $+\infty$ în z_0.*

Propoziţie 3.1.35. *Funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *are în punctul* $z_0 \in A'$ *limita* $l = 0$ *dacă şi numai dacă* $|f|$ *are în* z_0 *limita* 0.

Propoziţie 3.1.36. *Funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *are într-un punct* $z_0 \in A'$ *limita* l *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{z_0\}$ *rezultă că* $f(z_n) \longrightarrow l$.

Propoziţie 3.1.37. *Funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *are într-un punct* $z_0 \in A'$ *limita finită* l *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *cu proprietatea că* $|f(z) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $z \in A$ *cu* $0 < |z - z_0| < \delta$.

Definiţie 3.1.38. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ **este continuă în punctul** $z_0 \in A$ dacă pentru orice $U \in \mathcal{V}(f(z_0))$ există $V \in \mathcal{V}(z_0)$ astfel încât $f(V \cap A) \subseteq U$.

Observaţie 3.1.39. Dacă $z_0 \in Iz(A)$ este un punct izolat al mulţimii $A \subseteq \mathbb{C}$, atunci orice funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ este continuă în z_0.

Propoziţie 3.1.40. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *şi* $z_0 \in A \cap A'$. *Afirmaţiile următoare sunt echivalente:*
a) f *este continuă în punctul* z_0.
b) $(\forall)\varepsilon > (\exists)\delta > 0 : (\forall)z \in A : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.
c) $(\exists) \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z)$ *şi* $(\exists) \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.
d) $(\forall)(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : z_n \longrightarrow z_0 \Longrightarrow f(z_n) \Longrightarrow f(z_0)$.

3.1.3 Funcţii olomorfe

Definiţie 3.1.41. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime de numere complexe astfel încât $D \cap D' \neq \emptyset$. O funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se numeşte $\mathbb{C}-$**derivabilă în punctul** $z_0 \in D \cap D'$ dacă există şi este finită limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

În acest caz notăm limita de mai sus $f'(z_0)$ şi o numim **derivata funcţiei** f **în punctul** z_0. Dacă $D \subseteq D'$ şi f este $\mathbb{C}-$derivabilă în

orice punct $z \in D$, spunem că funcţia f este $\mathbb{C}-$**derivabilă pe** D. În acest caz putem defini o funcţie $f' : D \longrightarrow \mathbb{C}$, numită **derivata funcţiei** f.

Propoziţie 3.1.42. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, iar $z_0 \in D \cap D'$. Funcţia f este $\mathbb{C}-$derivabilă în punctul z_0 dacă şi numai dacă există o funcţie $\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, continuă în punctul z_0 astfel încât*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widetilde{f}(z) \quad , (\forall) z \in D\,.$$

Demonstraţie. Dacă f este o funcţie $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0, funcţia $\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, definită prin

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f'(z_0) & , z = z_0 \\ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , z \neq z_0\,, \end{cases}$$

are proprietatea că $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widetilde{f}(z)$, $(\forall) z \in D$ şi

$$\lim_{z \to z_0} \widetilde{f}(z) = f'(z_0) = \widetilde{f}(z_0)\,,$$

deci este continuă în punctul z_0.

Reciproc, dacă $\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie continuă în z_0 cu proprietatea că $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widetilde{f}(z)$, $(\forall) z \in D$, atunci

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(z_0)\,.$$

Prin urmare, f este $\mathbb{C}-$derivabilă, cu $f'(z_0) = \widetilde{f}(z_0)$. □

Propoziţie 3.1.43. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie $\mathbb{C}-$derivabilă într-un punct $z_0 \in D \cap D'$, atunci f este continuă în z_0.*

Demonstraţie. Cu notaţiile din propoziţia precedentă avem că

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)| = \lim_{z \to z_0} |(z - z_0)\widetilde{f}(z)| = 0 \cdot |f'(z_0)| = 0\,,$$

astfel că f este continuă în z_0. □

Propoziţie 3.1.44. *Dacă $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii $\mathbb{C}-$derivabile într-un punct $z_0 \in D \cap D'$, atunci $f+g$, λf, fg sunt $\mathbb{C}-$derivabile în z_0 şi*

$$\begin{aligned} &(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)\\ &(\lambda f)'(z_0) = \lambda \cdot f'(z_0)\\ &(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\,. \end{aligned}$$

În plus, dacă $g(z_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0 şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}\,.$$

Demonstraţie. $\mathbb{C}-$derivabilitatea funcţiilor f şi g în punctul z_0 implică existenţa funcţiilor $\widetilde{f}, \widetilde{g} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, continue în z_0, astfel încât

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\widetilde{f}(z)\\ g(z) = g(z_0) + (z-z_0)\widetilde{g}(z) \end{aligned} \qquad (z \in D)\,.$$

Avem atunci

$$(f+g)(z) = (f+g)(z_0) + (z-z_0)(\widetilde{f}(z) + \widetilde{g}(z))\,,$$

$$\lambda f(z) = \lambda f(z_0) + (z-z_0)\lambda \widetilde{f}(z)$$

şi

$$\begin{aligned} &(fg)(z) = f(z_0)g(z_0) + (z-z_0)(f(z_0)\widetilde{g}(z) + \widetilde{f}(z)g(z_0)+\\ &+(z-z_0)\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z))\,, \end{aligned}$$

astfel că funcţiile $f+g$, λf şi fg sunt $\mathbb{C}-$derivabile în z_0 şi

$$\begin{aligned} &(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)\\ &(\lambda f)'(z_0) = \lambda \cdot f'(z_0)\\ &(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\,. \end{aligned}$$

Dacă $g(z_0) \neq 0$, avem că

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)} + \frac{(z-z_0)(\widetilde{f}(z)g(z_0) + f(z_0)\widetilde{g}(z))}{g(z)g(z_0)}$$

şi din continuitatea funcţiei g în punctul z_0 rezultă că funcţia $\frac{f}{g}$ este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0 şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}\,.$$

$\square$

Propoziţie 3.1.45. *Fie $D, E \subseteq \mathbb{C}$, iar $f : D \longrightarrow E$ şi $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ două funcţii cu proprietatea că f este $\mathbb{C}-$derivabilă într-un punct $z_0 \in D \cap D'$, $f(z_0) \in E \cap E'$, iar g este $\mathbb{C}-$derivabilă în punctul $f(z_0)$. Atunci $g \circ f$ este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0 şi*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)\,.$$

Demonstraţie. Din $\mathbb{C}-$derivabilitatea funcţiilor f şi g în z_0, respectiv $f(z_0)$, rezultă existenţa funcţiilor $\widetilde{f}$ şi $\widetilde{g}$, continue în z_0, respectiv $f(z_0)$, cu proprietatea că

$$\begin{matrix} f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widetilde{f}(z) \\ g(w) = g(f(z_0)) + (w - f(z_0))\widetilde{g}(w) \end{matrix} \qquad (z \in D, w \in E)\,.$$

Atunci

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= g(f(z_0)) + (f(z) - f(z_0))\widetilde{g}(f(z)) = \\ &= g(f(z_0)) + (z - z_0)\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z) \quad (z \in D)\,. \end{aligned}$$

Rezultă că $g \circ f$ este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0 şi

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)\,.$$

$\square$

Propoziţie 3.1.46. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie injectivă pe D, $\mathbb{C}-$derivabilă în $z_0 \in D \cap D'$, cu proprietatea că $f'(z_0) \neq 0$, şi astfel încât funcţia $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ este continuă în punctul $f(z_0)$. Atunci f^{-1} este $\mathbb{C}-$derivabilă în $f(z_0)$ şi*

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

Demonstraţie. Funcţia f fiind $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0, există o funcţie $\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, continuă în z_0, astfel încât

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widetilde{f}(z) \qquad (z \in D)\,.$$

Pentru $z = f^{-1}(w)$, cu $w \in f(D)$, avem atunci

$$w = f(f^{-1}(w)) = f(z_0) + (f^{-1}(w) - z_0)\widetilde{f}(f^{-1}(w))\,.$$

Deoarece f^{-1} este continuă în $f(z_0)$, $\widetilde{f} \circ f^{-1}$ este continuă în $f(z_0)$ şi avem

$$\widetilde{f}(f^{-1}(f(z_0))) = \widetilde{f}(z_0) = f'(z_0)\,.$$

Există atunci o vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(z_0))$ astfel încât $\widetilde{f}(f^{-1}(w)) \neq 0$, $(\forall)w \in V \cap f(D)$. Rezultă că

$$f^{-1}(w) = z_0 + (w - f(z_0))\frac{1}{\widetilde{f}(f^{-1}(w))} \quad (w \in V \cap f(D))\,.$$

Funcţia f^{-1} este atunci $\mathbb{C}-$derivabilă în $f(z_0)$ şi

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

$\square$

Propoziţie 3.1.47. *Fie $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi $\mathbb{C}-$derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ cu proprietatea că*

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)|(b - a)\,.$$

Demonstraţie. Definim recursiv un şir de intervale $[a_n, b_n]$ prin $[a_0, b_0] := [a, b]$ şi

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & , |f(a_n) - f(\frac{a_n+b_n}{2})| \geq |f(b_n) - f(\frac{a_n+b_n}{2})|\,, \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & , |f(a_n) - f(\frac{a_n+b_n}{2})| \leq |f(b_n) - f(\frac{a_n+b_n}{2})|\,. \end{cases}$$

Atunci $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi respectiv $|f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})| \geq \frac{1}{2}|f(b_n) - f(a_n)|$, astfel că

$$|f(b_n) - f(a_n)| \geq \frac{1}{2^n}|f(b) - f(a)| \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}\,.$$

Cum şirul de intervale $[a_n, b_n]$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \overset{not}{=} c \in (a,b)$. f fiind $\mathbb{C}-$derivabilă în c, există $\widetilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, continuă în c, astfel încât

$$f(x) = f(c) + (x-c)\widetilde{f}(x) \quad (x \in [a,b])\,.$$

Atunci $f(b_n) - f(a_n) = (b_n - c)\widetilde{f}(b_n) + (c - a_n)\widetilde{f}(a_n)$ şi rezultă că

$$|\widetilde{f}(b_n)|\frac{b_n - c}{b_n - a_n} + |\widetilde{f}(a_n)|\frac{c - a_n}{b_n - a_n} \geq \frac{1}{b_n - a_n}|f(b_n) - f(a_n)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^n(b^n - a_n)}|f(b) - f(a)| = \frac{1}{b-a}|f(b) - f(a)|\,.$$

Din continuitatea în c a funcţiei $\widetilde{f}$ rezultă că $\widetilde{f}(a_n) \longrightarrow \widetilde{f}(c) = f'(c)$ şi $\widetilde{f}(b_n) \longrightarrow \widetilde{f}(c) = f'(c)$, de unde ţinând cont de inegalităţile

$$min(|\widetilde{f}(b_n)|, |\widetilde{f}(a_n)|) \leq |\widetilde{f}(b_n)|\frac{b_n - c}{b_n - a_n} + |\widetilde{f}(a_n)|\frac{c - a_n}{b_n - a_n}$$

$$max(|\widetilde{f}(b_n)|, |\widetilde{f}(a_n)|) \geq |\widetilde{f}(b_n)|\frac{b_n - c}{b_n - a_n} + |\widetilde{f}(a_n)|\frac{c - a_n}{b_n - a_n}$$

obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{f}(b_n)|\frac{b_n - c}{b_n - a_n} + |\widetilde{f}(a_n)|\frac{c - a_n}{b_n - a_n} = |f'(c)|$$

şi prin urmare

$$|f'(c)| \geq \frac{1}{b-a}|f(b) - f(a)|\,.$$

$\square$

Propoziţie 3.1.48. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie $\mathbb{C}-$derivabilă pe D, iar $z_0, z_1 \in D$ astfel încât $[z_0, z_1] \subseteq D$. Atunci există un punct $w \in [z_0, z_1]$ cu proprietatea că*

$$|f'(w)| \cdot |z_1 - z_0| \geq |f(z_1) - f(z_0)| .$$

Demonstraţie. Fie $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ funcţia complexă definită prin

$$g(t) = f((1-t)z_0 + tz_1) .$$

Atunci g este $\mathbb{C}-$derivabilă şi prin urmare există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$|g'(c)| \geq |g(1) - g(0)| .$$

Cum $g'(t) = (z_1 - z_0)f((1-t)z_0 + tz_1)$, $(\forall)t \in (0,1)$, iar $g(0) = f(z_0)$ şi $g(1) = f(z_1)$, pentru $w = ((1-c)z_0 + cz_1 \in [z_0, z_1]$ obţinem că

$$|f'(w)| \cdot |z_1 - z_0| \geq |f(z_1) - f(z_0)| .$$

□

Propoziţia de mai sus este o versiune complexă a teoremei creşterilor finite a lui Lagrange.

Definiţie 3.1.49. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. O funcţie complexă $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se numeşte **olomorfă pe** D, şi notăm $f \in \mathcal{H}(D)$, dacă este $\mathbb{C}-$derivabilă în orice punct din D. O funcţie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ care este olomorfă pe $\mathbb{C}$ se numeşte *funcţie întreagă*.

Propoziţie 3.1.50. *Dacă D este un domeniu(i.e. o mulţime deschisă şi conexă) în $\mathbb{C}$, iar $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D, astfel încât $f'(z) = 0$, $(\forall)z \in D$, atunci f este constantă pe D.*

Demonstraţie. Mulţimea D fiind domeniu, este conexă prin linii poligonale, astfel că pentru oricare două puncte $z, w \in D$ există un şir de segmente $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \ldots, [z_{n-1}, z_n] \subseteq D$, cu $z_0 = z$ şi $z_n = w$. Conform versiunii complexe a teoremei lui Lagrange, pentru fiecare segment $[z_{i-1}, z_i]$ există un punct $w_i \in [z_{i-1}, z_i]$ astfel încât

$$0 \leq |f(z_i) - f(z_{i-1})| \leq |f'(w_i)| \cdot |z_i - z_{i-1}| = 0 .$$

Rezultă că $f(z_{i-1} = f(z_i)$, $(\forall)i = \overline{1,n}$. Dar atunci $f(z) = f(w)$, $(\forall)z, w \in D$, şi funcţia f este constantă pe D. $\square$

Definiţie 3.1.51. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă. Spunem că f este **derivabilă parţial în raport cu** x, respectiv **în raport cu** y în punctul $z_0 \in D$ dacă există şi este finită limita

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,,$$

respectiv

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$

Observaţie 3.1.52. Funcţia f, cu $Re(f) = u$, $Im(f) = v$, este derivabilă parţial în raport cu x, respectiv y, în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ dacă şi numai dacă funcţiile reale u şi v sunt derivabile parţial în raport cu x, respectiv y, şi au loc egalităţile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,,$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Propoziţie 3.1.53. *Dacă $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0, atunci f este derivabilă parţial în raport cu x şi cu y în z_0, şi*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'(z_0)\,.$$

Demonstraţie. Dacă f este $\mathbb{C}-$derivabilă în z_0, există limita

$$f'(z_0) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}\,.$$

În particular, pentru $w = t \in \mathbb{R}$ avem că $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$. Alegând $w = it \in i\mathbb{R}$, obţinem că $if'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. $\square$

Definiţie 3.1.54. Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este derivabilă parţial în raport cu x şi cu y într-un punct $z_0 = x_0 + iy_0$, se numeşte **aplicaţia tangentă funcţiei** f **în punctul** z_0 funcţia $d_{z_0}f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin

$$(d_{z_0}f)(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot Re(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot Im(z)\,.$$

De asemenea, **derivatele parţiale ale funcţiei** f **în raport cu** z**, respectiv** $\overline{z}$ **în punctul** z_0 sunt definite prin

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\,.$$

Teoremă 3.1.55. *Fie $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă derivabilă parţial în raport cu x şi cu y în punctul $z_0 \in D$. Afirmaţiile următoare sunt echivalente:*
a) $i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.
c) $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.
d) $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.
e) funcţia $d_{z_0}f$ este $\mathbb{C}-$liniară.

Observaţie 3.1.56. Egalităţile de la punctul d) al teoremei de mai sus se numesc **condiţiile Cauchy-Riemann**.

Corolar 3.1.57. *O funcţie complexă $f \in \mathcal{H}(D)$ este este constantă pe domeniul D dacă şi numai dacă una dintre funcţiile $Re(f)$, $Im(f)$, $|f|$ sau $arg(f)$ este constantă.*

Corolar 3.1.58. *Dacă funcţia $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este olomorfă pe D, cu $u, v \in \mathcal{C}^2(D)$, atunci funcţiile u şi v sunt armonice(i.e., $\Delta u = \Delta v = 0$).*

Demonstraţie. Din $f \in \mathcal{H}(D)$ rezultă că funcţiile u şi v verifică condiţiile Cauchy-Riemann în orice punct $z \in D$. Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

şi deci

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Analog obţinem şi că $\Delta v = 0$. □

3.1.4 Serii de puteri. Funcţii analitice

Definiţie 3.1.59. Fie $a \in \mathbb{C}$ un punct fixat, iar $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ un şir de numere complexe. **Seria de puteri centrată în punctul** a**, de coeficienţi** c_n este şirul

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k\right\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{not}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\,.$$

Teoremă 3.1.60. *(***Abel***)*
Pentru orice $a \in \mathbb{C}$ *şi orice* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *există un unic număr real* $R \in [0,\infty]$ *cu proprietatea că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *este convergentă absolut pe discul deschis* $D(a,R)$ *şi divergentă pe* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$*. În plus, seria de puteri converge uniform pe orice mulţime compactă* $K \subseteq D(a,R)$*.*

Observaţie 3.1.61. Dacă $R = \infty$, consiedrăm $D(a,R) = \mathbb{C}$

Definiţie 3.1.62. Numărul R din teorema de mai sus se numeşte **raza de convergenţă a seriei**. Pentru $R > 0$, $D(a,R)$ se numeşte **discul de convergenţă al seriei**, iar dacă $0 < R < \infty$, $\partial D(a,R)$ se numeşte **cercul de convergenţă**.

Teoremă 3.1.63. *(***Abel***)*
Dacă seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *converge pentru* $z = b \neq a$*, atunci ea converge absolut pe* $D(a,|b-a|)$*.*

Teoremă 3.1.64. *(***Cauchy-Hadamard***)*
Raza de convergenţă R *a seriei de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *este dată*

de

$$R = \frac{1}{\omega}\,, \quad \textit{unde } \omega = \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

Corolar 3.1.65. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Propoziţie 3.1.66. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *este o serie de puteri cu raza de convergenţă* $R > 0$*, funcţia* $f : D(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ *dată de*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

este olomorfă pe $D(a,R)$ *şi*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}\,.$$

Corolar 3.1.67. *Suma unei serii de puteri este o funcţie indefinit* $\mathbb{C}-$*derivabilă pe discul de convergenţă.*

Definiţie 3.1.68. O funcţie complexă $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte **funcţie analitică pe** D dacă pentru orice $a \in D$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ cu $V \subseteq D$ şi o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, cu proprietatea că $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $(\forall) z \in V$.

Corolar 3.1.69. *O funcţie analitică* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *este olomorfă şi indefinit* $\mathbb{C}-$*derivabilă pe* D.

3.1.5 Integrala complexă

Definiţie 3.1.70. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, iar $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă. Spunem că **funcţia f este integrabilă Rie-**

mann pe $[a,b]$ dacă funcţiile $Re(f)$ şi $Im(f)$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$. În acest caz, **integrala funcţiei** f **pe** $[a,b]$ este

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt\,.$$

Introducem în continuare noţiunea de integrală curbilinie a funcţiilor complexe.

Definiţie 3.1.71. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, iar $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. O funcţie continuă $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$ se numeşte **drum** în D. Mulţimea $Im(\gamma) = \gamma([a,b])$ se numeşte *suportul drumului* γ, iar $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc **punctul iniţial**, respectiv **punctul final** al drumului γ. Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, spunem că γ este un **drum închis**. Pentru o diviziune

$$\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$$

a intervalului $[a,b]$, notăm

$$\sigma(\gamma,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\,.$$

Spunem că drumul γ este **rectificabil** dacă există

$$L(\gamma) = sup\{\sigma(\gamma,\Delta)|\,\Delta - \text{diviziune a intervalului } [a,b]\} < \infty\,,$$

numit în acest caz **lungimea drumului** γ.

Drumul γ se numeşte **neted** dacă funcţia γ este derivabilă, iar derivata γ' este continuă pe $[a,b]$. Drumul se numeşte **parţial neted** dacă există o diviziune $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ încât γ să fie neted pe fiecare dintre intervalele $[t_{k-1}, t_k]$.

Propoziţie 3.1.72. *Dacă γ este un drum parţial neted, atunci γ este rectificabil şi*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt\,.$$

Definiţie 3.1.73. Fie $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ două drumuir. Ele se numesc **echivalente** dacă există o funcţie continuă şi strict crescătoare $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$, cu proprietatea că există o diviziune $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ înc ât h să fie derivabilă cu derivata continuă pe fiecare dintre intervalele $[t_{k-1}, t_k]$, astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$. În acest caz spunem că **drumul** γ_1 **este o reparametrizare a drumului** γ_2.

Propoziţie 3.1.74. *Relaţia definită mai sus între drumuri este o relaţie de echivalenţă.*

Propoziţie 3.1.75. *Dacă un drum este parţial neted, atunci orice reparametrizare a sa este de asemenea un drum parţial neted, de aceeaşi lungime cu drumul iniţial.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$, cu $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ şi $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ ca în definţia de mai sus, atunci γ_1 este parţial neted ca şi compunere de funcţii parţial netede, iar

$$L(\gamma_1) = \int_a^b |\gamma_1'(t)|dt = \int_a^b |\gamma_2'(h(t)) \cdot h'(t)|dt =$$

$$= \int_a^b |\gamma_2'(h(t))| \cdot h'(t)dt = \int_c^d |\gamma_2'(u)|du = L(\gamma_2)\,.$$

□

Definiţie 3.1.76. Fie $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ două puncte, cu $z_0 \neq z_1$. **Drumul liniar cu punctul iniţial** z_0 **şi punctul final** z_1 este drumul $\gamma_{z_0,z_1} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definit prin

$$\gamma_{z_0,z_1}(t) = (1 - t)z_0 + tz_1\,.$$

Propoziţie 3.1.77. *Drumul liniar* γ_{z_0,z_1} *este neted şi are lungimea* $L(\gamma_{z_0,z_1}) = |z_1 - z_0|$.

Definiţie 3.1.78. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. **Drumul circular de centru** z_0 **şi rază** r este drumul $\gamma_{z_0,r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, definit prin

$$\gamma_{z_0,r}(t) = z_0 + r(cos(t) + i \cdot sin(t))\,.$$

Observaţie 3.1.79. Prin abuz de notaţie scriem $\partial D(z_0, r)$ în loc de $\gamma_{z_0,r}$.

Propoziţie 3.1.80. *Drumul circular $\partial D(z_0, r)$ este neted şi are lungimea $L(\partial D(z_0, r)) = 2\pi r$.*

Definiţie 3.1.81. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă definită pe mulţimea deschisă D, iar $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un drum parţial neted, cu $Im(\gamma) \subseteq D$. Dacă f este continuă pe $Im(\gamma)$, **integrala(curbilinie a) funcţiei f pe drumul γ** este

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)dt\,.$$

Propoziţie 3.1.82. *Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$, atunci pentru orice $r > 0$ şi orice $a \in D(z_0, r)$ are loc*

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{z-a} = 2\pi i\,.$$

Demonstraţie. Drumul $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definit prin

$$\gamma(t) = a + \rho(t)(cos(2\pi t) + i \cdot sin(2\pi t))\,,$$

unde $\rho(t) = |z_0 - a + r(cos(2\pi t) + i \cdot sin(2\pi t))$, este o reparametrizare a curbei circulare $\partial D(z_0, r)$. Atunci

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{z-a} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\rho(t)(cos(2\pi t) + i \cdot sin(2\pi t))} (\rho(t)(cos(2\pi t) + i \cdot sin(2\pi t)))' dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + \int_0^1 (2\pi i)dt = ln(\rho(t))|_0^1 + 2\pi i = 0 + 2\pi i = 2\pi i\,.$$

□

Propoziţie 3.1.83. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, care este continuă pe suportul drumului parţial neted $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$. Dacă drumul $\tau : [c, d] \longrightarrow D$ este o reparametrizare a drumului γ, atunci $Im(\tau) = Im(\gamma)$, iar*

$$\int_\tau f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz\,.$$

Propoziţie 3.1.84. *Dacă $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sunt două funcţii complexe, continue pe suportul drumului parţial neted γ, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avem că*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)(z)dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz\,.$$

Propoziţie 3.1.85. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, continuă pe suportul drumului parţial neted $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$. Atunci au loc inegalităţile*

$$\left|\int_a^b \gamma(t)dt\right| \le \int_a^b |\gamma(t)|dt\,,$$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le |sup(f'|_{Im(\gamma)})| \cdot L(\gamma)\,.$$

Propoziţie 3.1.86. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, care este continuă pe suportul drumului parţial neted $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$, iar şirul $\{f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii continue pe $Im(\gamma)$, care converge uniform pe $Im(\gamma)$ la funcţia f. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz\,.$$

Definiţie 3.1.87. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ şi $\tau : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ două drumuri parţial netede cu $\gamma(b) = \tau(c)$. Spunem atunci că cele două **drumuri** γ **şi** τ **sunt juxtapozabile**. Drumul parţial neted $\gamma \cdot \tau : [0, b - a + d - c] \longrightarrow \mathbb{C}$ definit prin

$$(\gamma \cdot \tau)(t) = \begin{cases} \gamma(a + t) & , t \in [0, b - a] \\ \tau(c - b + a + t) & , t \in [b - a, b - a + d - c] \end{cases}$$

se numeşte **compusul(sau juxtapunerea) drumurilor γ şi τ**.

Drumul $\gamma^{-1} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definit prin $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$ se numeşte **inversul drumului γ**.

Propoziţie 3.1.88. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă, care este continuă pe suporturile drumurilor parţial netede şi juxtapozabile $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ şi $\tau : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$. Atunci*

$$\int_{\gamma\cdot\tau} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\tau f(z)dz\,,$$

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\,.$$

Teoremă 3.1.89. *(***Cauchy-Goursat***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$ are loc egalitatea

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0\,.$$

Propoziţie 3.1.90. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie continuă cu $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Atunci pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$ are loc egalitatea*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0\,.$$

Teoremă 3.1.91. *(***formula lui Cauchy***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$ şi orice $a \in \overset{\circ}{R}$ are loc egalitatea

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}dz\,.$$

Demonstraţie. Funcţia $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & , z \neq a \\ f'(a) & , z = a \end{cases}$$

este continuă pe D şi olomorfă pe $D \setminus \{a\}$, astfel că $\int_{\partial R} g(z)dz = 0$ pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$. Dar atunci

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a)\int_{\partial R} \frac{1}{z-a}dz + \int_{\partial R} g(z)dz = 2\pi i \cdot f(a)\,.$$

$\square$

Teoremă 3.1.92. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Atunci orice funcţie olomorfă $f \in \mathcal{H}(D)$ este analitică pe D.*

Corolar 3.1.93. *Orice funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ este indefinit $\mathbb{C}-$derivabilă pe D.*

Propoziţie 3.1.94. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f \in \mathcal{H}(D)$ şi $a \in D$. Atunci există o unică serie de puteri centrată în punctul a, convergentă la f pe o vecinătate a punctului a, dată de*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-a)^n\,.$$

Definiţie 3.1.95. Seria de mai sus se numeşte **seria Taylor asociată funcţiei f centrată în punctul** a.

Corolar 3.1.96. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f \in \mathcal{H}(D)$, $R \subseteq \mathbb{C}$ un dreptunghi închis inclus în D şi $a \in \overset{\circ}{R}$. Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$ are loc atunci egalitatea*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\,.$$

Teoremă 3.1.97. *(***Cauchy-Pompeiu***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, iar f o funcţie continuă, care are derivate parţiale în raport cu x şi cu y, continue pe D. Pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$ are atunci loc egalitatea

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 2i \iint_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dxdy\,.$$

3.1.6 Primitivabilitatea funcţiilor complexe

Definiţie 3.1.98. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă. f se numeşte **primitivabilă pe** D, şi notăm $f \in \mathcal{P}(D)$, dacă există o funcţie $F \in \mathcal{H}(D)$, numită **primitivă a funcţiei** f, cu proprietatea că $F' = f$.
Funcţia f se numeşte **local primitivabilă pe** D, şi notăm în acest caz $f \in \mathcal{P}_{loc}(D)$, dacă pentru orice $a \in D$ există un disc $D(a, r) \subseteq D$ încât $f \in \mathcal{P}(D(a, r))$.

Observaţie 3.1.99. Au loc incluziunile

$$\mathcal{P}(D) \subseteq \mathcal{P}_{loc}(D) \subseteq \mathcal{H}(D)\,.$$

Teoremă 3.1.100. *(***Morera***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe D. Dacă

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$, atunci $f \in \mathcal{P}_{loc}(D)$.

Corolar 3.1.101. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe D. Afirmaţiile următoare sunt echivalente:*
a) $f \in \mathcal{H}(D)$;
b) $f \in \mathcal{P}_{loc}(D)$;
c) $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$, pentru orice dreptunghi închis $R \subseteq D$.
În particular, $\mathcal{P}_{loc}(D) = \mathcal{H}(D)$.

Propoziţie 3.1.102. *Fie $D = D(a, r) \subseteq \mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci $f \in \mathcal{P}(D)$. În plus, dacă f are dezvoltarea în serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

atunci funcţia

$$F(z) = \sum_{n=0}^{infinit} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

este o primitivă a funcţiei f. În particular, $\mathcal{H}(D(a, r)) = \mathcal{P}(D(a, r))$.

Teoremă 3.1.103. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie continuă. Dacă f este primitivabilă pe D, atunci pentru orice drum închis parţial neted γ cu suportul $Im(\gamma) \subseteq D$ are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Reciproc, dacă D este un domeniu, iar f este o funcţie care vaerifică egalitatea de mai sus pentru orice drum închis parţial neted γ cu $Im(\gamma) \subseteq D$, atunci f este primitivabilă pe D, iar oricare două primitive ale lui f diferă printr-o constantă.

Teoremă 3.1.104. *(***formula lui Cauchy pentru discuri***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Pentru orice $a \in D$ şi $r > 0$ astfel încât $\overline{D}(a, r) \subseteq D$ avem

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-w}dz\,.$$

Corolar 3.1.105. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, iar $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci pentru orice $a \in D$ şi $r > 0$ astfel încât $\overline{D}(a, r) \subseteq D$ avem*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad , (\forall)n \in \mathbb{N}\,.$$

Corolar 3.1.106. *(***inegalităţile lui Cauchy***)*
Fie $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ şi $f \in \mathcal{H}(D(a, r))$. Pentru orice $\rho \in (0, r)$, dacă $M_\rho = sup\{|f(z)| \,|\, |z-a| = \rho\}$, atunci

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{\rho^n}M_\rho \qquad (\forall)n \in \mathbb{N}\,.$$

Teoremă 3.1.107. *(***Liouville***)*
Orice funcţie întreagă şi mărginită este constantă.

Teoremă 3.1.108. *(***Liouville***)*
Dacă f este o funcţie întreagă şi există $M, K > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f(z)| \leq M + K|z|^n \quad , (\forall)z \in \mathbb{C}\,,$$

atunci f este un polinom de grad cel mult n.

Teoremă 3.1.109. *(***d'Alembert***)*
Orice polinom neconstant cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

3.1.7 Serii Laurent

Definiţie 3.1.110. Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Mulţimea

$$D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} |\, 0 < |z - a| < r\} = D(a, r) \setminus \{a\}$$

se numeşte **discul redus centrat în** a **de rază** r.

Pentru $0 \leq r_0 < r_1 \leq \infty$, **coroana circulară centrată în** a **de raze** r_0**,** r_1 este mulţimea

$$\Delta(a; r_0, r_1) = \{z \in \mathbb{C} |\, r_0 < |z - a| < r_1\}$$

Definiţie 3.1.111. Dacă $a \in \mathbb{C}$ şi $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$, seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

se numeşte **serie de puteri întregi centrată în** a **cu coeficienţii** c_n. **Partea principală** a acestei serii este seria

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n ,$$

iar seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

se numeşte **partea analitică** a seriei.

Teoremă 3.1.112. *Fie* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ *o serie de puteri întregi, iar* $r, R \in [0, \infty]$ *date de*

$$r = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}\,, \qquad R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}\,.$$

Dacă $r < R$, seria de puteri este convergentă pe coroana $\Delta(a; r, R)$ şi divergentă pe $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(a; r, R)$. În plus, seria converge uniform şi absolut pe orice mulţime compactă $K \subseteq \Delta(a; r, R)$, iar suma ei este o funcţie olomorfă pe $\Delta(a; r, R)$.

Propoziţie 3.1.113. *Fie $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r_0 < r < r_1 \le \infty$, iar $D = \Delta(a; r_0, r_1)$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci integrala*

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)dz$$

nu depinde de r.

Teoremă 3.1.114. *(***formula integrală a lui Cauchy pentru coroane***)*
Fie $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r_0 < r_1 \le \infty$, $D = \Delta(a; r_0, r_1)$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Pentru orice punct $w \in D$ şi orice $\rho_0, \rho_1 > 0$ cu proprietatea că $r_0 < \rho_0 < |w - a| < \rho_1 < r_1$ are loc egalitatea

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,\rho_1)} \frac{f(z)}{z - w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,\rho_0)} \frac{f(z)}{z - w} dz \, .$$

Teoremă 3.1.115. *(***Laurent***)*
Fie $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r_0 < r_1 \le \infty$, $D = \Delta(a; r_0, r_1)$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci există un unic şir $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ indexat după mulţimea numerelor întregi astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \qquad (z \in D)\, .$$

Definiţie 3.1.116. Seria de puteri din teorema de mai sus se numeşte **seria Laurent asociată funcţiei f, centrată în punctul** a.

Definiţie 3.1.117. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $a \in \mathbb{C} \setminus D$ cu proprietatea că există $r > 0$ astfel încât $D^*(a, r) \subseteq D$. Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$, punctul a se numeşte **punct singular(sau izolat) al funcţiei** f.

Teoremă 3.1.118. *(***Riemann***)*
Fie $a \in \mathbb{C}$ un punct, $r > 0$ şi $f \in \mathcal{H}(D^*(a,r))$ cu proprietatea că $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Atunci există $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(D(a,r))$ astfel încât $\widetilde{f}|_{D^*(a,r)} = f$.

Definiţie 3.1.119. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Dacă există o funcţie $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(D)$ cu proprietatea că $\widetilde{f}|_{D\setminus\{a\}} = f$, atunci punctul a se numeşte **punct singular aparent(sau eliminabil) al funcţiei** f.

Propoziţie 3.1.120. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Afirmaţiile următoare sunt atunci echivalente:*
a) a este punct singular aparent al funcţiei f.
b) funcţia f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ cu $V \subseteq D$.
c) funcţia f are limită finită în punctul a.
d) există $r > 0$ astfel încât $D^*(a,r) \subseteq D$ şi seria Laurent a lui f pe $D^*(a,r)$ are partea principală nulă.

Definiţie 3.1.121. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Dacă f are în punctul a limita ∞ spunem că **punctul** a **este un pol al funcţiei** f. Notăm cu $\mathcal{P}(f;D)$ mulţimea polilor $a \in D$ ai funcţiei f.

Dacă f nu are limită în punctul a, acesta se numeşte **punct singular esenţial al funcţiei** f.

Propoziţie 3.1.122. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Afirmaţiile următoare sunt atunci echivalente:*
a) punctul a este un pol al funcţiei f.
b) a este punct singular aparent pentru funcţia $\frac{1}{f}$.
c) există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 0$ astfel încât pentru orice $r > 0$ cu proprietatea că $D^*(a,r) \subseteq D$, seria Laurent centrată în a asociată funcţiei f pe $D^*(a,r)$ are coeficientul $c_{-n_0} \neq 0$ şi $c_n = 0$, $(\forall)n < -n_0$.
d) există $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, şi o funcţie $g \in \mathcal{H}(D)$ cu proprietatea că $g(a) = ne0$ şi $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}g(z)$, $(\forall)z \in D$.
e) există $r > 0$ şi două funcţii nenule $g, h \in \mathcal{H}(D(a,r))$, cu proprietatea că $g(a) \neq 0 = h(a)$, încât $f \cdot h = g$ pe $D^*(a,r)$.

Propoziţie 3.1.123. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $a \in D$, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. Atunci a este un punct singular esenţial al funcţiei f dacă şi numai dacă seria Laurent a funcţiei f pe un disc $D^*(a,r) \subseteq D$ are o infinitate de termeni nenuli în partea principală.*

Definiţie 3.1.124. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $D \in \mathcal{V}(\infty)$ spunem că ∞ **este punct singular al funcţiei** f. Dacă $r > 0$ este astfel încât $\Delta(0; r, \infty) \subseteq D$, spunem că ∞ este punct singular aparent, pol, sau punct singular esenţial al funcţiei f după cum 0 este punct singular aparent, pol, sau punct singular esenţial pentru funcţia $g \in \mathcal{H}(D^*(0, \frac{1}{r}))$ definită prin $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

Definiţie 3.1.125. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie complexă. Funcţia f se numeşte **funcţie meromorfă pe** D dacă există o mulţime discretă $E \subseteq D$, formată din puncte singulare sau poli ai funcţiei f, astfel încât $f \in \mathcal{H}(D \setminus E)$. Mulţimea $D \setminus \mathcal{P}(f; D)$ se numeşte în acest caz **mulţimea punctelor regulare ale funcţiei** f. Notăm cu $\mathcal{M}(D)$ mulţimea funcţiilor meromorfe pe D.

Propoziţie 3.1.126. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $E \subseteq D$ o submulţime discretă, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus E)$. Atunci f este meromorfă pe D dacă şi numai dacă pentru orice punct $a \in E$ există $r > 0$ şi funcţii nenule $g, h \in \mathcal{H}(D(a,r))$ astfel încât $f \cdot h = g$ pe $D^*(a,r)$.*

Observaţie 3.1.127. Dacă $f \in \mathcal{M}(D)$ este o funcţie meromorfă, atunci funcţia $\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definită prin $\widetilde{f}(w) = \lim\limits_{z \to w} f(z)$ este continuă pe D şi olomorfă pe $D \setminus \mathcal{P}(f; D)$.

Propoziţie 3.1.128. *Mulţimea $\mathcal{M}(D)$ este un corp în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a funcţiilor.*

Definiţie 3.1.129. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f \in \mathcal{M}(D)$ şi $a \in D$. Dacă f nu este identic nulă, iar seria sa Laurent centrată în punctul a are coeficienţii c_n, $n \in \mathbb{Z}$, numărul

$$ord_a(f) := inf\{n \in \mathbb{Z} | \, c_n \neq 0\}$$

se numeşte **ordinul funcţiei** f **în punctul** a.

Dacă $\widetilde{f}$ este extensia cu valori în $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a funcţiei f definită mai sus, iar $\widetilde{f}(a) = 0$, spunem că **punctul** a **este un zerou de ordin** $ord_a(f)$ **al funcţiei** f. Punctul a se numeşte **un zerou simplu al lui** f dacă $ord_a(f) = 1$.

Dacă $a \in \mathcal{P}(f; D)$, $|ord_a(f) = -ord_a(f)$ se numeşte **ordinul polului** a.

Pentru funcţia identic nulă 0_D definim $ord_a(0_D) = \infty$, $(\forall) a \in D$.

Propoziţie 3.1.130. *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *o mulţime nevidă deschisă, iar* $f \in \mathcal{M}(D) \setminus \{0_D\}$ *o funcţie meromorfă neidentic nulă pe* D. *Pentru* $a \in D$ *au loc proprietăţile următoare:*
a) a *este punct regular pentru* f *dacă şi numai dacă* $ord_a(f) \geq 0$.
b) a *este punct regular pentru* f *cu* $\widetilde{f}(a) \neq 0$ *dacă şi numai dacă* $ord_a(f) = 0$.
c) a *este pol pentru* f *dacă şi numai dacă* $ord_a(f) < 0$.

Dacă de asemenea, $g \in \mathcal{M}(D) \setminus \{0_D\}$ *este neidentic nulă, iar* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *atunci*
d) $ord_a(f \cdot g) = ord_a(f) + ord_a(g)$.
e) $ord_a(f + g) \geq min(ord_a(f), ord_a(g))$,
cu egalitate dacă $ord_a(f) \neq ord_a(g)$.

Propoziţie 3.1.131. *Mulţimea* $\mathcal{M}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ *a funcţiilor meromorfe pe* $\mathbb{C}$ *pentru care* ∞ *nu este pol singular esenţial coincide cu mulţimea funcţiilor raţionale.*

3.2 Teoria reziduurilor şi aplicaţii

3.2.1 Indexul unui drum. Formula integrală a lui Cauchy

Definiţie 3.2.1. Fie $\gamma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ un drum închis parţial neted, iar $a \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$. **Indexul drumului** γ **faţă de punctul** a este

numărul
$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz\,.$$

Propoziţie 3.2.2. *Pentru orice drum închis $\gamma:[c,d]\longrightarrow\mathbb{C}$ care este parţial neted şi orice punct $a\in\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$, indexul $n(\gamma,a)$ este un număr întreg.*

Propoziţie 3.2.3. *Dacă $\gamma:[c,d]\longrightarrow\mathbb{C}$ este un drum închis parţial neted, $a\in\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$, iar $f:[c,d]\longrightarrow\mathbb{C}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $a\notin Im(f)$ şi $f(t)\in Arg(\gamma(t)-a)$, $(\forall)t\in[c,d]$, atunci*
$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi}(f(d)-f(c))\,.$$

Propoziţie 3.2.4. *Fie γ şi τ două drumuri închise parţial netede, cu acelaşi punct iniţial. Atunci*
a) $n(\gamma,a)=-n(\gamma^{-1},a)$, $(\forall)a\in\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$.
b) $n(\gamma\cdot\tau,a)=n(\gamma,a)+n(\tau,a)$, $(\forall)a\in\mathbb{C}\setminus(Im(\gamma)\cup Im(\tau))$.

Observaţie 3.2.5. Dacă γ este un drum închis parţial neted, atunci imaginea sa este o mulţime închisă mărginită, iar $D_\gamma:=\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ se descompune într-un număr finit de componente conexe deschise, dintre care una singură este nemărginită.

Propoziţie 3.2.6. *Fie γ un drum închis parţial neted în $\mathbb{C}$. Atunci aplicaţia $n_\gamma:D_\gamma\longrightarrow\mathbb{Z}:a\longrightarrow n(\gamma,a)$ este o funcţie constantă pe fiecare componentă conexă a mulţimii D_γ. În plus, funcţia n_γ este nulă pe componenta nemărginită a lui D_γ.*

Propoziţie 3.2.7. *Fie γ un drum închis parţial neted în $\mathbb{C}$, iar $f:Im(\gamma)\longrightarrow\mathbb{C}$ o funcţie continuă. Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ definim $F_n:\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)\longrightarrow\mathbb{C}$ prin*
$$F_n(w)=\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz\,.$$
Atunci $F_n\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus Im(\gamma))$ şi $F_n'=nF_{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Teoremă 3.2.8. *(***formula integrală a lui Cauchy***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sunt drumuri închise parţial netede în D cu proprietatea că

$$n(\gamma_1, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0\,, \quad (\forall) w \in \mathbb{C} \setminus D\,,$$

atunci pentru orice $a \in D \setminus (\cup_{k=1}^m Im(\gamma_k))$ are loc egalitatea

$$f(a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz\,.$$

Definiţie 3.2.9. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, iar γ un drum închis parţial neted în D. Dacă $n(\gamma, w) = 0$, $(\forall) w \in \mathbb{C} \setminus D$, spunem că drumul γ este **omolog cu zero**(sau **nul omolog**).

Corolar 3.2.10. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ omulţime deschisă, iar γ un drum închis parţial neted în D, omolog cu zero. Atunci pentru orice $a \in D \setminus Im(\gamma)$ are loc*

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz\,.$$

Corolar 3.2.11. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sunt drumuri închise parţial netede în D cu proprietatea că $n(\gamma_1, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0$, $(\forall) w \in \mathbb{C} \setminus D$, atunci pentru orice $a \in D \setminus (\cup_{k=1}^m Im(\gamma_k))$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, are loc egalitatea*

$$f^{(n)}(a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, a) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz\,.$$

Corolar 3.2.12. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sunt drumuri închise parţial netede în D cu proprietatea că $n(\gamma_1, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0$, $(\forall) w \in \mathbb{C} \setminus D$, atunci*

$$\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0\,.$$

Teoremă 3.2.13. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f \in \mathcal{H}(D)$ o funcţie olomorfă având mulţimea $Z(f)$ a zerourilor finită. Dacă γ este un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în D, cu proprietatea că $Im(\gamma) \cap Z(f) = \emptyset$, atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z(f)} n(\gamma, a)\cdot ord_a(f)\,.$$

Teoremă 3.2.14. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f \in \mathcal{M}(D)$ o funcţie meromorfă având mulţimile $Z(f)$ a zerourilor şi $\mathcal{P}(f)$ a polilor finite. Dacă γ este un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în D, cu proprietatea că $Im(\gamma) \cap (Z(f) \cup \mathcal{P}(f)) = \emptyset$, atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z(f)\cup\mathcal{P}(f)} n(\gamma, a)\cdot ord_a(f)\,.$$

3.2.2 Teorema reziduurilor

Definiţie 3.2.15. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $E \subseteq D$ o submulţime discretă, iar $f \in \mathcal{H}(D \setminus E)$. Pentru $a \in E$ şi $r > 0$ astfel încât $\overline{D}(a,r) \subseteq D$, $\overline{D}(a,r) \cap E = \{a\}$, considerăm seria Laurent centrată în a asociată funcţiei f pe $D^*(a,r)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (z \in D^*(a,r))\,.$$

Numărul $c_{-1} \stackrel{not}{=} res(f;a)$ se numeşte atunci **reziduul funcţiei** f **în punctul** a.

Corolar 3.2.16. *Cu notaţiile făcute în definiţia de mai sus, dacă $\rho \in (0,r)$, atunci*

$$res(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} f(z)dz\,.$$

Observaţie 3.2.17. Reziduul $res(f;a))$ al funcţiei f în punctul a este numărul complex $c \in \mathbb{C}$ unic determinat, cu proprietatea că funcţia $f(z) - \frac{c}{z-a}$ este primitivabilă pe $D^*(a,r)$.

Observaţie 3.2.18. Dacă a este un pol de ordin $m \geq 1$ al funcţiei f, iar $g(z) = (z-a)^m f(z)$, atunci

$$res(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)} .$$

Teoremă 3.2.19. *(***Teorema reziduurilor***)*
Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, iar $E \subseteq D$ o submulţime discretă în D. Dacă γ este un drum închis, care este parţial neted şi omotop cu zero în D astfel încât $Im(\gamma) \cap E = \emptyset$, atunci pentru orice funcţie $f \in \mathcal{H}(D \setminus E)$, mulţimea $\{a \in E |\, n(\gamma, a) \neq 0\}$ este finită şi are loc egalitatea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in E} n(\gamma, a) \cdot res(f; a) .$$

Propoziţie 3.2.20. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{M}(D)$. Dacă f nu este identic nulă într-o vecinătate a unui punct $a \in D$, atunci funcţia meromorfă $\frac{f'}{f}$ are în punctul a cel mult un pol simplu şi $res(\frac{f'}{f}, a) = ord_a(f)$.*

Definiţie 3.2.21. Dacă funcţia meromorfă f admite pe ∞ ca punct singular izolat, atunci reziduul lui f în ∞ este

$$res(f, \infty) = res\left(-\frac{1}{z^2} f(z), 0\right) .$$

Propoziţie 3.2.22. *Fie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$. Notând $a_0 = \infty$ avem atunci că*

$$\sum_{k=0}^{n} res(f; a_k) = 0 .$$

3.3 Probleme propuse

Problema 3.1. Să se calculeze suma seriei

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k cos(k(\theta - \rho)) \quad , |\rho| < 1 .$$

Problema 3.2. Să se determine funcţiile $\mathbb{C}-$derivabile $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pentru care
a) $u(x,y) = 2sh(x)cos(y) - 3ch(x)sin(y) + x^2 - y^2 + 4xy$.
b)

$$v(x,y) = \frac{sh(2y)}{cos(2x) + ch(2y)} \quad , w(\frac{\pi}{4}) = 1 .$$

c)

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2} \quad , w(1) = 0 .$$

d)

$$u(x,y) = \frac{x}{2} ln(x^2 + y^2) - yarctg\frac{y}{x} .$$

e)

$$u(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 3x + 2}{x^2 + y^2 - 4x + 4} \quad , w(1) = i .$$

f)

$$u = a\, arg(z) + b \quad , a, b \in \mathbb{R} .$$

g)

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2} - x) .$$

h)

$$v(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y) .$$

Problema 3.3. Să se calculeze:
i^{1-i}, $(1 + i\sqrt{3})^i$, 1^{-i}, e^{sqrti}.

Problema 3.4. Să se determine punctele singulare ale funcţiilor:
a)
$$f(z) = \sqrt[5]{\frac{z^2+1}{z^3-1}}\,.$$
b)
$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(z+i)}}{(z-3)^2}\,.$$
c)
$$f(z) = \sqrt{(z+1)(z-2i)(z-3)}\,.$$
d)
$$f(z) = ln\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\,.$$

Problema 3.5. Să se determine sumele pe domeniile de convergenţă ale seriilor de puteri:
$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} z^n\,.$$

Problema 3.6. Să se determine seriile Taylor ale funcţiilor următoare în punctele indicate:
a) $f(z) = ch^2(z)$, $z = 0$.
b) $f(z) = sin^3(z)$, $z = 0$.
c) $f(z) = th(z)$, $z = 0$.
d)
$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-8z+15} \quad , z = 4\,.$$
e)
$$f(z) = \frac{z-1}{z-2} \quad , z = 0,\ z = i\,.$$
f)
$$f(z) = (1+z)^{\frac{1}{z}} \quad , z = 0\,.$$
g)
$$f(z) = sin\frac{z}{1-z} \quad , z = 0\,.$$

h) $f(z)=\sqrt[5]{z-2i}$, $f(0)=\sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{10}}$, $z=0$, $z=2$.
i) $f(z)=ln(z)$, $f(1+i)=\frac{1}{2}ln(2)-i\frac{7\pi}{4}$, $z=-i$.

Problema 3.7. Să se determine seriile Laurent ale funcţiilor următoare în jurul punctelor indicate şi precizaţi natura acestor puncte:
a)
$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}\quad, z=1,\ z=\infty\,.$$
b)
$$f(z)=sin\frac{1}{1-z}\quad, z=1,\ z=\infty\,.$$
c)
$$f(z)=e^{i\pi\frac{z+i}{z-i}}\quad, z=i\,.$$
d) $f(z)=ctg(z)$, $z=0$, $z=k\pi$.
e)
$$f(z)=\frac{2sin^2(z)}{z^5}\quad, z=0\,.$$
f)
$$f(z)=\frac{ch(3\sqrt{z})}{ch(2\sqrt{z})}\quad, z=0\,.$$
g)
$$f(z)=sin(z)\cdot sin\frac{1}{z}\quad, z=0,\ z=\infty\,.$$

Problema 3.8. Să se calculeze integralele următoare:
a)
$$\oint_{|z+2i|=2}\frac{ch\frac{\pi z}{2}}{(z+i)^4}dz\,.$$
b)
$$\oint_{4x^2+y^2=4}\frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z^2+1}dz\,.$$
c)
$$\oint_{|z|=3}\frac{w(z)}{z^2}dz\quad, w(z)=\sqrt[5]{\frac{z+3i}{3-z}},\ w(3i)=\sqrt[20]{2}e^{i\frac{19\pi}{20}}\,.$$

Problema 3.9. Să se calculeze pentru funcţiile următoare reziduurile relative la punctele lor singulare:

a)
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{sh(z)}\,.$$
b)
$$f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n}\,.$$
c)
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}\,.$$
d)
$$f(z) = \frac{1}{z^3 sin(z)}\,.$$
e)
$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{1-z}}\,.$$
f)
$$f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}\,.$$
g)
$$f(z) = \frac{e^{az}}{(1+e^{\frac{z}{2}})^2}\,.$$
h)
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{ch^2(z)}\,.$$

Problema 3.10. Să se calculeze integralele următoare, folosind teorema reziduurilor:

a)
$$\oint_{x^2+y^2-2y-3=0} \frac{1}{zcos(z^2)}dz\,.$$
b)
$$\oint_{x^2+y^2+2x=0} z^2 e^{\frac{2z}{z+1}}dz\,.$$

c)

$$\oint_{|z|=r} z^n cos\frac{1}{z}dz\,.$$

d)

$$\oint_{4x^2+9y^2-36=0} \frac{z^{13}}{(z-4)^2(z^5+3)^2}dz\,.$$

e)

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{4z^2+12z+13}dz\,.$$

Capitolul 4

Serii Fourier

4.1 Baze ortogonale într-un spaţiu vectorial Hilbert

Definiţie 4.1.1. Un spaţiu vectorial real $\mathcal{H}$ înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cu proprietatea că orice şir fundamental este convergent în raport cu topologia determinată pe $\mathcal{H}$ de norma $|| \cdot ||$ indusă de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se numeşte **spaţiu Hilbert**.

Definiţie 4.1.2. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert, iar $S = \{v_i\}_{i \in I}$ o familie de vectori din $\mathcal{H}$. Familia S se numeşte **sistem ortogonal** dacă $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $(\forall) i, j \in I, i \neq j$. O familie ortogonală $S = \{v_i\}_{i \in I}$ se numeşte **sistem ortonormat** dacă $||v_i|| = 1$, $(\forall) i \in I$.

Propoziţie 4.1.3. *Dacă $S \subseteq \mathcal{H}$ este o familie ortogonală de vectori nenuli din spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$, S este un sistem liniar independent.*

Demonstraţie. Fie $v_1, \ldots, v_n \in S$ oarecare şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Atunci

$$\alpha_i = \frac{1}{||v_i||^2} \alpha_i ||v_i||^2 = \frac{1}{||v_i||^2} \langle v_i, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \rangle = 0 \quad , (\forall) i = \overline{1, n} \, ,$$

astfel că S este liniar independent. $\square$

Definiţie 4.1.4. Fie $S = \{v_i\}_{i\in I}$ o familie ortogonală de elemente nenule din spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$, iar $x \in \mathcal{H}$. **Coeficienţii Fourier ai elementului** x **în raport cu familia ortogonală** S sunt numerele reale $c_i(x) = \frac{\langle x,v_i\rangle}{||v_i||^2}$, $i \in I$.

Propoziţie 4.1.5. *Dacă* $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{H}$ *este o familie ortogonală,* $x \in \mathcal{H}$ *un vector oarecare, iar* c_i, $i = \overline{1,n}$ *coeficienţii Fourier ai elementului* x *în raport cu* S*, atunci pentru orice numere reale* b_i, $i = \overline{1,n}$ *are loc inegalitatea*

$$||x - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i|| \geq ||x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i||$$

Demonstraţie. Pentru orice $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ avem

$$||x - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i||^2 = ||x||^2 - 2\sum_{i=1}^{n} b_i\langle x, v_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} b_i^2||v_i||^2 =$$

$$= ||x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i||^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i - c_i)^2||v_i||^2 \geq ||x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i||^2 .$$

□

Observaţie 4.1.6. În condiţiile propoziţiei de mai sus, are loc egalitatea

$$||x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i||^2 = ||x||^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i\langle x, v_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i^2||v_i||^2 =$$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2||v_i||^2 ,$$

astfel că

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2||v_i||^2 \leq ||x||^2 .$$

Corolar 4.1.7. *Dacă* $S = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *este o familie ortogonală numărabilă de vectori nenuli,* $x \in \mathcal{H}$ *un vector, iar* c_n, $n \in \mathbb{N}$ *sunt coeficienţii Fourier ai elementului* x *în raport cu* S, *atunci seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||v_n||^2$$

este convergentă, cu suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||v_n||^2 \leq ||x||^2 .$$

În particular, dacă S *este o familie ortonormată, atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq ||x||^2 .$$

Corolar 4.1.8. *În condiţiile corolarului de mai sus, seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ *este convergentă în spaţiul Hilbert* $\mathcal{H}$.

Definiţie 4.1.9. O familie de elemente $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ se numeşte **familie totală** dacă pentru $x \in \mathcal{H}$ are loc echivalenţa

$$x = 0_{\mathcal{H}} \Longleftrightarrow \langle x, v_i \rangle = 0, \ (\forall) i \in I .$$

Propoziţie 4.1.10. *Condiţia necesară şi suficientă ca o familie ortogonală de elemente să formeze o bază într-un spaţiu Hilbert este ca ea să fie totală.*

Propoziţie 4.1.11. *Fie* $S = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *este o familie ortogonală de vectori nenuli. Condiţia necesară şi suficientă ca* S *să formeze o bază în* $\mathcal{H}$ *este ca pentru orice vector* $x \in \mathcal{H}$ *să aibă loc egalitatea*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||v_n||^2 = ||x||^2 .$$

Observaţie 4.1.12. Egalitatea de mai sus poartă numele de **ecuaţia de închidere a familiei** S sau **condiţia lui Parseval**.

4.2 Spaţiul $L^2_{\mathbb{R}}(D)$. Serii trigonometrice

Definiţie 4.2.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime compactă, iar $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(D)$ mulţimea funcţiilor reale de pătrat integrabil definite pe D. Spaţiul cât al acestuia în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim$ definită prin

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad \text{a.p.t.}$$

(a.p.t.="aproape peste tot", i.e., dacă $D_{f,g} = \{x \in \mathbb{R} | \, f(x) \neq g(x)\}$, atunci $inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) | \, D_{f,g} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)\} = 0$), se notează cu $L^2_{\mathbb{R}}(D)$. Acesta este un spaţiu vectorial real în raport cu operaţiile de adunare a claselor de funcţii, respectiv de înmulţire a acestora cu scalari. De asemenea, putem defini un produs scalar pe $L^2_{\mathbb{R}}(D)$ prin

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_D f(x)g(x)dx \, .$$

Propoziţie 4.2.2. *În raport cu aceste operaţii, $L^2_{\mathbb{R}}(D)$ este un spaţiu Hilbert.*

Observaţie 4.2.3. Pentru simplitatea scrierii, vom identifica clasa $\hat{f} \in L^2_{\mathbb{R}}(D)$ a unei funcţii f cu funcţia însăşi, şi vom înţelege că egalităţile de funcţii care apare sunt egalităţi a.p.t.

Observaţie 4.2.4. Se ştie că pentru orice $l > 0$, orice funcţie $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-l, l])$ este limita uniformă a unui şir de funcţii continue, care pot fi alese polinoame, sau polinoame trigonometrice.

Propoziţie 4.2.5. *Familia de funcţii $\{1\} \cup \{cos\frac{n\pi x}{l}, \, sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este ortogonală.*

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\langle 1, cos\frac{n\pi x}{l} \rangle = \int_{-l}^{l} cos\frac{n\pi x}{l} \, dx = 0 \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^* \, ,$$

$$\langle 1, sin\frac{n\pi x}{l} \rangle = \int_{-l}^{l} sin\frac{n\pi x}{l} \, dx = 0 \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^* \, ,$$

$$\langle cos\frac{m\pi x}{l}, cos\frac{n\pi x}{l}\rangle = \int_{-l}^{l} cos\frac{m\pi x}{l} cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = 0\ , m \neq n\,,$$

$$\langle sin\frac{m\pi x}{l}, sin\frac{n\pi x}{l}\rangle = \int_{-l}^{l} sin\frac{m\pi x}{l} sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = 0\ , m \neq n\,,$$

$$\langle cos\frac{m\pi x}{l}, sin\frac{n\pi x}{l}\rangle = \int_{-l}^{l} cos\frac{m\pi x}{l} sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = 0\ , m, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Rezultă că familia dată de funcţii este într-adevăr ortogonală. $\square$

Corolar 4.2.6. *Fiind densă şi ortogonală, familia de funcţii* $\{1\} \cup \{cos\frac{n\pi x}{l},\ sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este o bază pentru* $L^2_{\mathbb{R}}([-l, l])$.

Corolar 4.2.7. *Dacă pentru o funcţie dată* $f \in L^2_{\mathbb{R}}([-l, l])$, *notăm coeficienţii Fourier faţă de baza de mai sus cu*

$$a_n = \frac{\langle f, cos\frac{n\pi x}{l}\rangle}{||cos\frac{n\pi x}{l}||^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

respectiv

$$b_n = \frac{\langle f, sin\frac{n\pi x}{l}\rangle}{||sin\frac{n\pi x}{l}||^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)\,,$$

atunci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right)\,.$$

Observaţie 4.2.8. Dacă funcţia $f \in L^2_{\mathbb{R}}([-l, l])$ este pară, atunci

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

respectiv $b_n = 0$, $(\forall) n > 0$.
Dacă funcţia $f \in L^2_{\mathbb{R}}([-l, l])$ este impară, atunci

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)\,,$$

respectiv $a_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

4.3 Probleme propuse

Problema 4.1. Să se determine seriile Fourier ale următoarelor funcţii periodice de perioadă $T = 2\pi$, date pe intervalul I de lungime 2π prin

a)
$$f(t) = \frac{\pi}{2sh(\pi)}cos(t) \quad , I = (-\pi, \pi] \, .$$

b)
$$f(t) = \frac{\pi}{2sh(\pi)}sin(t) \quad , I = (-\pi, \pi] \, .$$

c)
$$f(t) = \begin{cases} sin(t) & , t \in (0, \pi) \\ 0 & , t \in [\pi, 2\pi] \, . \end{cases}$$

d)
$$f(t) = \frac{\pi ch(at)}{2ch(a\pi)} \quad , I = (-\pi, \pi] \, .$$

e)
$$f(t) = \frac{\pi sh(at)}{2sh(a\pi)} \quad , I = (-\pi, \pi] \, .$$

f)
$$f(t) = \frac{\pi cos(at)}{2sin(at)} \quad , I = (-\pi, \pi] \, .$$

g)
$$f(t) = \frac{1}{5 - 4cos(t)} \quad , I = (0, 2\pi] \, .$$

h)
$$f(t) = \frac{sin(t)}{5 + 3cos(t)} \quad , I = (0, 2\pi] \, .$$

i)
$$f(t) = \frac{1}{5 + 3sin(t)} \quad , I = (0, 2\pi] \, .$$

Problema 4.2. Să se demonstreze identităţile:
a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n cos(n\theta) = \frac{rcos(\theta) - r^2}{1 - 2rcos(\theta) + r^2}\,.$$
b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n sin(n\theta) = \frac{rsin(\theta)}{1 - 2rcos(\theta) + r^2}\,.$$
c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n cos(n\theta) = -\frac{1}{2} ln(1 - 2rcos(\theta) + r^2)\,.$$
d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n sin(n\theta) = arctg\frac{rsin(\theta)}{1 - 2rcos(\theta) + r^2}\,.$$

Problema 4.3. Să se dezvolte funcţia $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 1 - t$
a) în serie de cosinus.
b) în serie de sinus.

Problema 4.4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţiile
a) $f(t) = cos(cos(t)) \cdot ch(sin(t))$, $-\pi < t < \pi$.
b) $f(t) = sin(cos(t)) \cdot sh(sin(t))$, $-\pi < t < \pi$.
c)
$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} sin(t) - \frac{1}{4} cos(t) \quad , -\pi < t < \pi\,.$$
d)
$$f(t) = sint \cdot ln(2) cos(\frac{t}{2}) - \frac{1}{4} sin(t) \quad , -\pi < t < \pi\,.$$

Capitolul 5

Funcţii speciale

5.1 Funcţiile Gamma şi Beta ale lui Euler

5.1.1 Funcţia Gamma

Definiţie 5.1.1. **Funcţia Gamma** alui Euler(sau **integrala euleriană de speţa a doua**) este funcţia Γ definită prin

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,.$$

Observaţie 5.1.2. Funcţia Γ se poate reprezenta ca sumă a două funcţii φ şi ω:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \varphi(z) + \omega(z)\,.$$

Funcţia $\omega(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ este continuă, poate fi definită pentru orice $z \in \mathbb{C}$, şi poate fi scrisă sub forma

$$\omega(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^\infty e^{-t+(z-1)ln(t)} dt\,.$$

Pentru z dintr-un domeniu marginit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, cu $Re(z) \leq x_0$, avem că

$$|e^{-t+(z-1)ln(t)}| \leq e^{-t+(x_0-1)ln(t)} = e^{-t} t^{x_0-1}\,.$$

Cum integrala $\int_1^\infty e^{-t}t^{x_0-1}dt$ este convergentă, integrala care dă funcţia $\omega(z)$ este uniform convergentă pe Ω. Cum domeniul mărginit Ω este oarecare, ω este o funcţie întreagă pe $\mathbb{C}$.

În ceea ce priveşte funcţia φ, folosind dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale, avem

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^1 t^{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z+n}\,.$$

Funcţia φ este meromorfă, având poli simpli în punctele de forma $-n$, $n \in \mathbb{N}$, cu reziduurile $\frac{(-1)^n}{n!}$. Rezultă că funcţia Γ este de asemenea meromorfă cu reziduurile $\frac{(-1)^n}{n!}$ în polii simpli $-n$, $n \in \mathbb{N}$.

Observaţie 5.1.3. Pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ avem

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z}dt = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)\,.$$

Cum $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$, obţinem că $\Gamma(n+1) = n!$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

Propoziţie 5.1.4. *Funcţia* Γ *verifică identitatea*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}\,.$$

Corolar 5.1.5.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Demonstraţie. Pentru $z = \frac{1}{2}$, avem că $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, şi cum $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, se obţine că $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. □

Observaţie 5.1.6. Deoarece $e^{-t} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(1-\frac{t}{n})^n$, avem că

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\,.$$

Efectuând în integrala de mai sus schimbarea de variabilă $t = nu$, putem scrie

$$\Gamma(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty} n^z\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}\,.$$

Observaţie 5.1.7. Folosind expresia de mai sus, avem că

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-ln(n))z}\cdot \\ &\cdot z(1+z)\left(1+\tfrac{z}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\tfrac{z}{n}\right)e^{-z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})}\,, \end{aligned}$$

astfel că

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\,,$$

unde γ este constanta lui Euler, dată de

$$\gamma = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-ln(n)\right)\,.$$

Propoziţie 5.1.8. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)\,.$$

5.1.2 Funcţia Beta

Definiţie 5.1.9. **Funcţia Beta** a lui Euler(sau **integrala euleriană de speţa întâi**) este definită prin

$$B(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx\,,$$

care are sens pentru $p, q \in \mathbb{C}$ cu $Re(p), Re(q) > 0$.

Observaţie 5.1.10. Cu schimbarea de variabilă $y = 1 - x$, se obţine imediat că

$$B(q,p) = B(p,q)\,.$$

Observaţie 5.1.11. Integrând prin părţi, avem că

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q)\,.$$

Observaţie 5.1.12. Pentru orice numere complexe $p, q \in \mathbb{C}$, cu $Re(p), Re(q) > 0$, are loc

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} u^{p-1} v^{q-1} du dv =$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \,,$$

de unde, trecând la coordonate polare, obţinem

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2p-1}(\alpha) sin^{2q-1}(\alpha) d\alpha \,.$$

Cu schimbările de variabilă $t = r^2$, respectiv $w = cos^2(\alpha)$

$$2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr = \int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt = \Gamma(p+q) \,,$$

şi

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2p-1}(\alpha) sin^{2q-1}(\alpha) d\alpha = \int_0^1 w^{p-1}(1-w)^{q-1} = B(p,q) \,.$$

Prin urmare, obţinem identitatea

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p,q) \,,$$

astfel că putem exprima funcţia Beta în funcţie de funcţia Gamma prin

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \,.$$

Propoziţie 5.1.13. *Funcţia Beta verifică egalităţile*

$$B(z,1) = \frac{1}{z}$$

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

$$2^{2z-1} B(z,z) = B\left(\frac{1}{2}, z\right) \,.$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$B(z,1) = \int_t^{z-1} (1-t)^{1-1} dt = \int_t^{z-1} dt = \frac{1}{z}\,.$$

De asemenea,

$$B(z, 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}\,.$$

Pentru ultima egalitate avem

$$2^{2z-1}B(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = B\left(\frac{1}{2}, z\right).$$

□

5.2 Polinoame ortogonale

5.2.1 Proprietăţi generale

Definiţie 5.2.1. Fie $\rho : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nenegativă. Pe spaţiul vectorial $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(a,b)$ al funcţiilor de pătrat integrabil pe intervalul (a,b) se poate defini produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx\,.$$

Funcţia ρ se numeşte în acest caz **ponderea produsului scalar** $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Observaţie 5.2.2. Având dată o bază într-un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar, prin procedeul de ortogonalizare al lui Schmidt se poate obţine o bază ortogonală.

Observaţie 5.2.3. Deoarece subspaţiul funcţiilor polinomoale este dens în $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(a,b)$, orice bază a spaţiului acestora devine prin ortogonalizare o bază ortogonală în $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(a,b)$. În particular, pornind de la

baza $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ se obţine un şir de polinoame $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică următoarele proprietăţi:

$$\langle p_m(x), p_n(x)\rangle = \int_a^b p_m(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0 \quad , (\forall)m, n \in \mathbb{N},\, m \neq n\,,$$

$$\langle x^m, p_n(x)\rangle = \int_a^b x^m p_n(x)\rho(x)dx = 0 \quad , (\forall)m, n \in \mathbb{N},\, m < n\,.$$

Propoziţie 5.2.4. *Fie $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ o bază ortogonală de polinoame construită ca în observaţia precedentă în raport cu un produs scalar de pondere ρ. Dacă $d_n = ||p_n(x)||$, iar $p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$, cu $a_n \neq 0$, atunci are loc relaţia de recurenţă*

$$xp_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}p_{n-1}(x)\,.$$

Demonstraţie. Deoarece gradul polinomului $xp_n(x)$ este $n+1$, acesta se poate exprima în funcţie de polinoamele $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$, folosind relaţia

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\langle xp_n(x), p_k(x)\rangle}{d_k^2}p_k(x)\,.$$

Cum $\langle xp_n(x), p_k(x)\rangle = \langle p_n(x), xp_k(x)\rangle = 0$, $(\forall)k < n-1$, obţinem că

$$xp_n(x) = \sum_{k=n-1}^{n+1} \frac{\langle xp_n(x), p_k(x)\rangle}{d_k^2}p_k(x) =$$

$$= c_{n+1}p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + c_{n-1}p_{n-1}(x)\,.$$

Identificând coeficienţii termenilor de grad $n+1$ şi n, rezultă că

$$a_n = c_{n+1}a_{n+1} \quad , \text{ respectiv } \quad b_n = c_{n+1}b_{n+1} + c_n a_n\,,$$

astfel că

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\ , \quad c_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\,.$$

Rezultă astfel că

$$\int_a^b x p_n(x) p_{n+1}(x) \rho(x) dx = d_{n+1}^2 \frac{a_n}{a_{n+1}} \,.$$

Înlocuind în această egalitate n cu $n-1$ rezultă că

$$\int_a^b x p_n(x) p_{n-1}(x) \rho(x) dx = d_n^2 \frac{a_{n-1}}{a_n} \,,$$

de unde

$$c_{n-1} = \frac{1}{d_{n-1}^2} \int_a^b x p_n(x) p_{n-1}(x) \rho(x) dx = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \,.$$

Relaţia din enunţ este acum demonstrată. $\square$

Corolar 5.2.5. *Cu notaţiile din propoziţia precedentă are loc relaţia (lui Darboux-Christoffel):*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k^2} p_k(x) p_k(y) = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x-y} \,.$$

Definiţie 5.2.6. Se numesc **polinoame ortogonale clasice** polinoamele ortogonale $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ construite în raport cu produsul scalar de pondere ρ, pondere care verifică ecuaţia diferenţială

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x) \,, \tag{5.1}$$

unde τ este un polinom de grad 1, σ este dat de

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & \text{dacă } a, b \in \mathbb{R} \\ x-a & \text{dacă } a \in \mathbb{R}, b = \infty \\ b-x & \text{dacă } a = -\infty, b \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } a = -\infty, b = \infty \,, \end{cases}$$

şi

$$\lim_{x \longrightarrow a} x^n \sigma(x)\rho(x) = \lim_{x \longrightarrow b} x^n \sigma(x)\rho(x) = 0 \quad , (\forall) n \in \mathbb{N} \,. \tag{5.2}$$

Observaţie 5.2.7. Din ecuaţia diferenţială (5.1) şi condiţiile la limită (5.2), obţinem expresia funcţiei ρ :

$$\rho(x) = \begin{cases} (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} & , \alpha = \frac{\tau(a)}{b-a} - 1,\ \beta = -\frac{\tau(b)}{b-a} - 1 \\ & (a, b \in \mathbb{R}) \\ (x-a)^{\alpha} e^{x\tau'(x)} & , \alpha = \tau(a) - 1 \\ & (a \in \mathbb{R}, b = \infty) \\ (b-x)^{\beta} e^{-x\tau'(x)} & , \beta = -\tau(b) - 1 \\ & (a = -\infty, b \in \mathbb{R}) \\ e^{\tau(x)dx} & (a = -\infty, b = \infty). \end{cases}$$

În plus, funcţia τ verifică următoarele restricţii:
i) $\tau(a) > 0$, dacă $a \in \mathbb{R}$;
ii) $\tau(b) < 0$, dacă $b \in \mathbb{R}$;
iii) $tau'(x) < 0$, $(\forall) x \in (a, b)$.

Propoziţie 5.2.8. *Dacă $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sunt polinoame ortogonale clasice în raport cu ponderea ρ, şi funcţiile σ şi τ ca în definiţia 5.2.6, atunci derivatele $p_n^{(m)}$ sunt de asemenea polinoame ortogonale clasice în raport cu ponderea $\rho_m := \sigma^m(x)\rho(x)$, care verifică ecuaţia diferenţială*

$$(\sigma(x)\rho_m(x))' = \tau_m(x)\rho_m(x)\,,$$

unde $\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x)$, respectiv condiţiile la limită

$$\lim_{x\longrightarrow a} x^k\sigma(x)\rho_m(x) = \lim_{x\longrightarrow b} x^k\sigma(x)\rho_m(x) = 0\,.$$

Propoziţie 5.2.9. *Polinoamele ortogonale clasice $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ date de 5.2.6 verifică ecuaţia diferenţială de ordin 2*

$$\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0\,,$$

unde $\lambda_n = -n\left(\tau'(x) + \frac{1}{2}(n-1)\sigma''(x)\right)$.

Observaţie 5.2.10. Notând

$$\begin{aligned} \lambda_{nk} &= -(n-k)\left(\tau_k'(x) + \tfrac{1}{2}(n-k-1)\sigma''(x)\right) = \\ &= -(n-k)\left(\tau'(x) + \tfrac{1}{2}(n+k-1)\sigma''(x)\right)\,, \end{aligned}$$

$$A_{nm} = (-1)^n \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk} \quad \text{şi} \quad A_n = \frac{n! a_n}{A_{nn}}\,,$$

se obţin relaţiile

$$p_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \cdot (\sigma^n(x)\rho(x))^{(n)} \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}\,,$$

relaţii care poartă numele de **formula generalizată a lui Rodrigues**.

5.2.2 Polinoamele lui Jacobi

Definiţie 5.2.11. Polinoamele Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}$, unde $\alpha, \beta \in (-1, \infty)$, sunt polinoamele ortogonale clasice definite pe intervalul $(-1, 1)$ în raport cu ponderea $\rho(x) = (x+1)^\alpha (1-x)^\beta$, cu funcţiile $\sigma(x) = 1-x^2$ şi $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta$.

Polinoamele lui Legendre

Definiţie 5.2.12. Polinoamele Legendre P_n sunt polinoamele Jacobi $P_n^{0,0}$ obţinute pentru valorile $\alpha = \beta = 0$.

Observaţie 5.2.13. Polinoamele Legendre P_n sunt polinoamele ortogonale clasice definite pe intervalul $(-1, 1)$ în raport cu ponderea $\rho(x) = 1$, şi funcţiile $\sigma(x) = 1 - x^2$ şi $\tau(x) = -2x$.

Propoziţie 5.2.14. *Polinoamele Legendre P_n verifică următoarele relaţii:*

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$$

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad , (\forall) x \in (-1, 1)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^{(n)}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad , (\forall) x \in (-1,1),\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

$$|P_n(x)| < 1 \quad , (\forall) x \in (-1,1)$$

$$\begin{array}{l} (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \\ P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \\ xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \\ P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \\ (1-x^2)P'_n(x) = n(P_{n-1}(x) - xP_n(x)) \end{array}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,, \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,,$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cdot cos(\alpha))^n d\alpha$$

Propoziţie 5.2.15. *Pentru orice funcţie* $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ *are loc*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)\,,$$

unde $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$.

Polinoamele lui Cebîşev

Definiţie 5.2.16. Polinoamele Cebîşev de speţa întâi T_n sunt polinoamele Jacobi $P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ obţinute pentru $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$.

Observaţie 5.2.17. Polinoamele T_n pot fi definite prin egalităţile

$$T_n(x) = cos(n \cdot arccos(x)) \quad , (\forall) x \in (-1,1)\,.$$

Observaţie 5.2.18. Polinoamele T_n sunt polinoamele ortogonale clasice pe intervalul $(-1,1)$ în raport cu ponderea $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, şi funcţiile $\sigma(x) = 1 - x^2$ şi $\tau(x) = -x$.

Propoziţie 5.2.19. *Polinoamele Cebîşev de speţa întâi T_n verifică următoarele relaţii:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & , m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})\right)^{(n)}$$

$$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)z^n \quad , (\forall) x \in (-1,1),\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

$$|T_n(x)| \leq 1\,, \quad |T_n'(x)| \leq n^2$$

$$T_n(x) = 0 \Longrightarrow x \in \left\{cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \mid k = \overline{1,n}\right\}$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$
$$(1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(n-k-1)!2^{n-2k}}{k!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x\,,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\,, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^2 + 5x$$

Propoziţie 5.2.20. *Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ are loc*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)\,,$$

unde $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $(\forall) n \geq 1$.

Definiţie 5.2.21. Polinoamele Cebîşev de speţa a doua U_n sunt polinoamele Jacobi $P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ obţinute pentru $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Observaţie 5.2.22. Polinoamele U_n pot fi definite prin egalităţile

$$U_n(x) = \frac{sin((n+1)arccos(x))}{sin(arccos(x))} \quad , (\forall) x \in (-1,1) \, .$$

Observaţie 5.2.23. Polinoamele U_n sunt polinoamele ortogonale clasice pe intervalul $(-1,1)$ în raport cu ponderea $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$, şi funcţiile $\sigma(x) = 1 - x^2$ şi $\tau(x) = -3x$.

Propoziţie 5.2.24. *Polinoamele lui Cebîşev de speţa a doua* U_n *verifică relaţiile:*

$$\int_{-1}^{1} U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & , m = n \end{cases}$$

$$(1-x^2) U_n''(x) - 3x U_n'(x) + n(n+2) U_n(x) = 0$$

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)}{(2n+1)!! \sqrt{1-x^2}} \left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right)^{(n)}$$

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n \quad , (\forall) x \in (-1,1), \, z \in \mathbb{C}, \, |z| < 1$$

$$|U_n(x)| \leq n + 1$$

$$U_n(x) = 0 \Longrightarrow x \in \left\{ cos \left(\frac{k}{n+1} \pi \right) | \, k = \overline{1,n} \right\}$$

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2x U_n(x)$$
$$(1-x^2) U_n'(x) = -nx U_n(x) + (n+1) U_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k)! 2^{n-2k}}{k!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$U_0(x) = 1 \, , \quad U_1(x) = 2x \, , \quad U_2(x) = 4x^2 - 1 \, , \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x \, ,$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1 \, , \quad U_5(x) = 32x^5 - 32x^2 + 6x$$

Propoziţie 5.2.25. *Pentru orice funcţie* $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ *are loc*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(x)\,,$$

unde $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx$, $c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx$, $(\forall) n \geq 1$.

5.2.3 Polinoamele lui Laguerre

Definiţie 5.2.26. Polinoamele lui Laguerre L_n^α sunt polinoamele ortogonale clasice definite pe intervalul $(0,\infty)$ în raport cu ponderea $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, şi funcţiile $\sigma(x) = x$ şi $\tau(x) = -x+\alpha+1$.

Propoziţie 5.2.27. *Polinoamele* L_n^α *ale lui Laguerre verifică relaţiile:*

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{1}{n!}\Gamma(n+1+\alpha) & , m = n \end{cases}$$

$$x(L_n^\alpha(x))'' + (1+\alpha-x)(L_n^\alpha(x))' + nL_n^\alpha(x) = 0$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^\alpha e^{-x} (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n \quad , (\forall) z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x-2n-1-\alpha)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$
$$(L_n^\alpha)'(x) - (L_{n-1}^\alpha)'(x) + L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$
$$L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x)$$
$$(L_n^\alpha)'(x) = -L_{n-1}^{\alpha-1}(x)$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(n+1+\alpha)}{k!(n-k)!\Gamma(k+1+\alpha)} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+\alpha)(n-1+\alpha)\cdot\ldots\cdot(k+1+\alpha)}{k!(n-k)!} x^k$$

$$L_0^\alpha(x) = 1\,, \quad L_1^\alpha(x) = -x+\alpha+1\,,$$

$$L_2^\alpha(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}\,,$$

$$L_3^\alpha(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{\alpha+3}{2}x^2 - \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)}{2}x + \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{6}$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^{x-\frac{\alpha}{2}}\int_0^\infty t^{n+\frac{\alpha}{2}}e^{-t}J_\alpha(2\sqrt{xt})dt\,,$$

unde J_α este funcţia lui Bessel de prima speţă.

Propoziţie 5.2.28. *Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,\infty)$ are loc*

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty C_n L_n^\alpha(x)\,,$$

unde , $C_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty f(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx$.

5.2.4 Polinoamele lui Hermite

Definiţie 5.2.29. Polinoamele lui Hermite H_n sunt polinoamele ortogonale clasice definite pe intervalul $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ cu ponderea $\rho(x) = e^{-x^2}$, şi funcţiile $\sigma(x) = 1$ şi $\tau(x) = -2x$.

Propoziţie 5.2.30. *Polinoamele H_n ale lui Hermite verifică relaţiile:*

$$\int_{-\infty}^\infty H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \end{cases}$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$$

$$e^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}H_n(x)z^n$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

$$|H_n(x)| \leq \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$
$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} n!}{k!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$H_0(x) = 1\,, \quad H_1(x) = 2x\,, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2\,,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x\,, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\,,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} cos(2xt)dt$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} sin(2xt)dt$$

Propoziţie 5.2.31. *Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ are loc*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)\,,$$

unde , $C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx.$

5.3 Funcţiile lui Bessel

5.3.1

Definiţie 5.3.1. Ecuaţia diferenţială

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0\,,$$

unde $\nu \in \mathbb{R}$ sau $\nu \in \mathbb{C}$ este un parametru fixat, iar $z \in \mathbb{R}$ sau $z \in \mathbb{C}$, se numeşte **ecuaţia diferenţială a lui Bessel**. Orice soluţie a unei ecuaţii diferenţiale Bessel se numeşte **funcţie Bessel**.

Observaţie 5.3.2. Căutând pentru ecuaţia lui Bessel o soluţie de forma $y(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, prin identificarea coeficienţiilor în ecuaţia Bessel se obţin relaţiile

$$(\rho^2 - \nu^2)c_0 = 0\,, \quad ((\rho+1)^2 - \nu^2)c_1 = 0\,,$$
$$((\rho+n)^2 - \nu^2)c_n = c_{n-2}\ ,\ (\forall)n \geq 2\,.$$

Putem presupune că $c_0 \neq 0$, astfel că $\rho^2 = \nu^2$. Obţinem că $\rho = \nu$ sau $\rho = -\nu$. Pentru $\rho = \nu$, dacă $2\nu+1 \neq 0$, atunci $c_1 = 0$ şi rezultă că

$$c_1 = c_3 = \ldots = c_{2k+1} = \ldots = 0\,,$$

iar

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}\,.$$

Cum $(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$, rezultă că

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}\,.$$

Definiţie 5.3.3. Funcţia Bessel de speţa întâi şi ordin ν J_ν este funcţia Bessel construită ca serie de puteri ca mai sus pentru $\rho = \nu$ şi astfel încât $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$.

Observaţie 5.3.4. Ţinând cont relaţiile dintre coeficienţii c_n, obţinem că

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} z^{2k} =$$
$$= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\,.$$

J_ν este o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ pentru $\nu \in \mathbb{N}$, respectiv pe $\mathbb{C} \setminus S$ dacă $\nu \notin \mathbb{N}$, unde S este o semidreaptă cu originea în 0.

Propoziţie 5.3.5. *Pentru* $\nu \notin \mathbb{Z}$, J_ν *şi* $J_{-\nu}$ *formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia lui Bessel.*

Demonstraţie. Deoarece dimensiunea spaţiului soluţiilor ecuaţiei Bessel este 2, este suficient să arătăm că funcţiile J_ν şi $J_{-\nu}$ sunt independente. Cum wronskianul celor două funcţii este

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = -\frac{21sin(\nu\pi)}{\pi z},$$

pentru $\nu \notin \mathbb{Z}$, avem $W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) \neq 0$, astfel că J_ν şi $J_{-\nu}$ sunt independente. □

Observaţie 5.3.6. Pentru $\nu = n \in \mathbb{N}$ avem

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Definiţie 5.3.7. Funcţia lui Bessel de speţa a doua Y_ν este funcţia definită prin

$$Y_n(z) = \frac{1}{sin(\nu\pi)}(cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)) \quad , \text{ dacă } \nu \notin \mathbb{Z},$$

respectiv

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \longrightarrow n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}|_{\nu=n}\right),$$

pentru $n \in \mathbb{N}$.

Definiţie 5.3.8. Funcţiile lui Bessel de speţa a treia $H_n^{(1)}$ şi H_n^2 (numite şi **funcţiile lui Hänkel**), sunt funcţiile definite prin

$$H_n^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_n^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z).$$

Propoziţie 5.3.9. *Dacă* $\{C_\nu\}$ *este una dintre familiile de funcţii Bessel* $\{J_\nu\}$, $\{Y_\nu\}$, $\{H_\nu^{(1)}\}$ *sau* $\{H_\nu^{(2)}\}$, *au loc relaţiile:*

$$\begin{aligned}
&C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z) = \tfrac{2\nu}{z}C_\nu(z)\\
&C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z) = 2C_\nu(z)\\
&zC'_\nu(z) + \nu C_\nu(z) = zC_{\nu-1}(z)\\
&zC'_\nu(z) - \nu C_\nu(z) = -zC_{\nu+1}(z)\\
&(z^\nu C_\nu(z))' = z^\nu C_{\nu-1}(z)\\
&(z^{-\nu} C_\nu(z))' = -z^{-\nu} C_{\nu+1}(z)
\end{aligned}$$

Propoziţie 5.3.10. *Funcţiile Bessel admit următoarele reprezentări integrale:*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}cos(tz)dt\,,\left(Re(\nu) > -\frac{1}{2}\right)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin(zsin(\alpha)-\nu\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(e^{t\nu}+e^{-t\nu}cos(\nu\pi))e^{-zsh(t)}dt\,,\nu\in\mathbb{C}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,,$$

$$\left(Re(\nu) > -\frac{1}{2}\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,,$$

$$\left(Re(\nu) > -\frac{1}{2}\right)$$

Propoziţie 5.3.11. *Funcţiile Bessel de speţa întâi J_n de indice întreg verifică relaţiile*

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$$

$$e^{izsin(\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)e^{in\varphi}$$

$$cos(z\,sin(\varphi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)cos(n\varphi) = J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)cos(2n\varphi)$$

$$sin(z\,sin(\varphi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)sin(n\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)sin((2n-1)\varphi)$$

$$J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(z\, sin(\varphi))cos(2n\varphi)d\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$J_{2n-1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin(z\, sin(\varphi))sin((2n-1)\varphi)d\varphi \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(n\varphi - z\, sin(\varphi))d\varphi$$

$$J_n(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)J_{n-k}(b)$$

$$J_0(\sqrt{a^2+b^2+2ab\, cos(\alpha)}) = J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)J_k(b)cos(k\alpha)$$

5.4 Probleme propuse

Problema 5.1. Să se verifice următoarele egalităţi:
a)

$$1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (4n-3) = \frac{4^n \Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

b)

$$1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n-2) = \frac{3^n \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

c)

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{2^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

d)

$$2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n-1) = \frac{3^n \Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

e)

$$3 \cdot 7 \cdot 11 cdot 15 \cdot \ldots \cdot (4n-1) = \frac{4^n \Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Problema 5.2. Să se stabilească inegalitatea $|\Gamma(\alpha+i\beta)| \leq |\Gamma(\alpha)|$.

Problema 5.3. Să se calculeze produsul

$$A = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad , n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 5.4. Să se calculeze integralele
a) $\int_0^a x^m (a^n - x^n)^p dx$, $m > -1, n > 0, p > -1$.
b) $\int_0^a (a^2 - x^2)^p dx$, $Re(p) > -1$.
c) $\int_{-a}^a (a+x)^{p-1}(a-x)^{q-1}$, $Re(p) > 0, Re(q) > 0$.
d) $\int_{-1}^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}$, $m > 0, Re(p) > 0, Re(q) > 0$.

e) $\int_0^1 (1-x^p)x^q dx$, $p, q \in \mathbb{N}$.
f)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2(\theta)}}\, d\theta\,.$$

g)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2(\theta)}\, d\theta\,.$$

h)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p} dx\,, \quad a, b > 0, 0 < m+1 < np\,.$$

i)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1\,.$$

Problema 5.5. Să se arate că polinoamele lui Legendre verifică următoarele egalităţi
a)

$$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} & , m = n+1 \\ \frac{2n}{4n^2-1} & , m = n-1 \\ 0 & , m \neq n-1, m \neq n+1\,. \end{cases}$$

b) $\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)P_{n+1}(x)dx = 0$.
c) $\int_{-1}^{1} x^2 P_{n-2}(x)P_n(x)dx = \frac{2n(n-1)}{(2n-3)(4n^2-1)}$.
d) $\int_{-1}^{1} (1-x^2)P_n'^2(x)dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$. e) $\int_{-1}^{1} P_m'(x)P_n'(x)dx = m(m+1)$, $m \leq n$, $m \equiv n (mod\, 2)$.

Problema 5.6. Verificaţi următoarele dezvoltări în serie de polinoame Cebîşev:
a) $x^{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k T_{2m-2k}(x) + \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m$.
b) $x^{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k T_{2m-2k+1}(x)$.
c) $arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}$.
d) $arcsin(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}$.

e) $\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1}$.
f) $ln(1+x) = -ln(2) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} T_n(x)$.
g) $\frac{1}{4} ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}$.

Capitolul 6

Teoria probabilităţilor

6.1 Câmp de probabilitate

6.1.1 Introducere

7 norocos?
Romanii considerau că există trei moduri de a obţine suma 7 atunci când sunt aruncate două zaruri: 6 cu 1, 5 cu 2, sau 4 cu 3. De asemenea, există trei moduri de a obţine suma 6: 5 cu 1, 4 cu 2, sau 3 cu 3. Astfel, şansa ca suma să fie 7 ar trebui să coincidă cu şansa ca suma să fie 6. Totuşi, în practică, ei constatau că suma 7 apare mai des decât suma 6. Acest lucru şi-l explicau prin intervenţia divină în favoarea "norocosului"7.

Quintă roială!
Chinta regală este mâna cea mai valoroasă în jocul de poker. Dintre cele 2.598.960 mâini care pot să apară la împărţirea cărţilor dintr-un pachet de 52 de cărţi, doar 4 sunt chinte regale. Astfel, şansa de a obţine o chintă regală este de $4/2.598.960$*, adică* $0,000154\%$*.*

Istorie
Probabilităţile sunt folosite în prezent în foarte multe domenii, printre care ar fi finanţele publice, medicina, asigurările, testele

şi evaluările educaţionale, genetica, previziunile meteorologice, teoria investiţiilor, sondajele de opinie, ştiinţele naturale, jocurile de noroc, şi multe altele. Arheologii au descoperit în Egipt artefacte folosite în jocurile de noroc datând din 3000 A.D.

Probleme matematice legate de jocurile de noroc au fost studiate de către un număr de matematicieni renascentişti. Italianul Girolamo Cardano(1501-1576, cunoscut şi pentru *formula lui Cardano* de rezolvare a ecuaţiei de grad 3) a prezentat în cartea sa *Liber de Ludo Aleae*(carte asupra jocurilor de zaruri) unul dintre primele calcule sistematice de probabilităţi. Chiar dacă este în esenţă un manual pentru pariori, această carte este considerată prima carte scrisă despre probabilităţi.

În secolul următor, mai precis pe parcursul a câtorva luni din anul 1654, într-un schimb de scrisori celebru, matematicenii francezi Blaise Pascal(1623-1662) şi Pierre de Fermat(1601-1665), au pus împreună bazele teoriei probabilităţilor, încercând să răspundă la două probleme ridicate de un celebru parior al vremii - Cavalerul de Méré.

În prima problemă propusă de Cavalerul de Méré, acesta îl întreba pe Pascal în care din următoarele două jocuri de zaruri are şanse mai mari de a câştiga:
a) Un jucător aruncă un zar de 4 *ori consecutiv. El câştigă jocul dacă la cel puţin una dintre aruncări obţine faţa* 6.
b) Un jucător aruncă două zaruri de 24 *ori consecutiv. El câştigă jocul dacă la cel puţin una dintre aruncări obţine dubla* $6-6$.

În a doua problemă, Cavalerul de Méré descria următoarea situaţie: Doi jucători, A *şi* B*, joacă un joc de noroc în care şansele de câştig a unei partide sunt egale. Dacă jocul este compus din trei partide, jucătorul* A *a câştigat prima partidă, dar apoi jocul a trebuit întrerupt din motive independente de cei doi jucători, care este cel mai corect mod de împărţire a mizei(ţinând cont de faptul că la scorul de* $1-0$*, jucătorul* A *are şanse mai mari de a câştiga jocul)?*

În 1657 matematicianul şi fizicianul olandez Christian Huygens a publicat primul tratat bazat pe corespondenţa dintre Pascal şi Fermat asupra teoriei probabilităţilor, *De Rationiciis de Ludo Aleae*

(Asupra argumentării în jocurile de zaruri), care conţine prima referire la conceptul de speranţă matematică.

Matematicianul elveţian Jacob Bernoulli(1654-1705), unul dintre membrii unei faimoase familii de matematicieni şi fizicieni, a stabilit în cartea sa *Ars Conjectandi*(arta conjecturii) o serie de principii fundamentale. Între aceastea, el a observat că o acurateţe mai mare a probabilităţii se poate obţine prin mărirea numărului de efectuări ale unui experiment. Această teoremă, numită şi teorema lui Bernoulli, este cunoscută ca *Legea numerelor mari*.

Dacă majoritatea lucrărilor publicate până pe la 1800 asupra teoriei probabilităţilor se refereau la zaruri sau alte jocuri de noroc, matematicianul francez Pierre Simon de Laplace(1749-1827) a fost primul care a aplicat probabilităţile şi la alte domenii decât pariuri. El este considerat de mulţi ca "părintele" teoriei probabilităţilor.

În cea mai mare parte, dezvoltarea teoriei probabilităţilor în secolul XIX se datorează şcolii ruse, având în P.L.Cebîşev(1821-1894) şi studentul acestuia A.A.Markov(1856-1922) doi reprezentanţi de frunte. În secolul XX, cel mai important continuator al lor a fost A.N.Kolmogorov(1903-1987), care a dat primul sistem axiomatic pentru teoria probabilităţilor în cartea sa *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*(Fundamentele Teoriei Probabilităţilor).

6.1.2 Noţiuni de bază. Definiţii şi proprietăţi

Experienţe. Probă. Eveniment

Definiţie 6.1.1. Numim **experienţă** o acţiune care poate fi repetată în condiţii date.

Notaţie 6.1.2. Notăm cu $\mathcal{E}$ o experienţă.

Definiţie 6.1.3. Se numeşte **probă** orice realizare practică(efectivă) a unei experienţe.

Notaţie 6.1.4. Notăm cu ω o probă.

Definiţie 6.1.5. Spunem că o **experienţă** este **deterministă** în cazul în care condiţiile experienţei definesc în mod cert rezultatul care se obţine.

Definiţie 6.1.6. Vom numi **experienţă aleatoare** o experienţă al cărei rezultat nu poate fi anticipat.

Notaţie 6.1.7. Notăm cu Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unei experienţe $\mathcal{E}$.

Exemplu 6.1.8. a) În cazul aruncării unui zar şi citirii numărului înscris pe faţa superioară a zarului, avem de-a face cu o experienţă aleatoare, pentru care mulţimea reazultatelor posibile este

$$\Omega = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}\,, \quad \text{cu } |\Omega| = 6.$$

(Notăm cu $|M|$ numărul de elemente ale unei mulţimi M.)
b) În cazul aruncării a două zaruri,

$$\Omega = \{(1,1),\, (1,2), \ldots,\, (6,6)\}\,, \quad |\Omega| = 36.$$

Definiţie 6.1.9. Numim **eveniment aleator** orice situaţie care se poate realiza prin una sau mai multe probe.

Notaţie 6.1.10. Evenimentele aleatoare le notăm cu A, B, ...

Notaţie 6.1.11. Mulţimea tuturor evenimentelor o notăm $\mathcal{P}(\Omega)$.

Observaţie 6.1.12. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$.

Definiţie 6.1.13. Se numeşte **eveniment elementar**(sau **simplu**) un eveniment care se realizează printr-o singură probă.

Exemplu 6.1.14. În cazul experienţei aruncării unui zar, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ - apariţia feţei cu un anumit număr constituie evenimente elementare.

Observaţie 6.1.15. $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ este eveniment elementar $\Longleftrightarrow |A| = 1$.

Definiţie 6.1.16. Numim **eveniment compus** un eveniment care se descompune în mai multe evenimente simple.

Observaţie 6.1.17. Un eveniment $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ este compus dacă şi numai dacă $|A| > 1$.

Exemplu 6.1.18. Fie, în cazul experienţei aruncării a două zaruri, C evenimentul "obţinerea sumei 5". Atunci

$$C = \{(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)\}, \quad |C| = 4.$$

Definiţie 6.1.19. Numim **eveniment imposibil** un eveniment care nu se realizează prin nici o probă.

Notaţie 6.1.20. Notăm cu $\emptyset$ evenimentul imposibil.

Exemplu 6.1.21. a) Obţinerea sumei 13 din două aruncări de zaruri.
b) Obţinerea sumei 1 din două aruncări de zaruri.

Definiţie 6.1.22. Numim **eveniment sigur** un eveniment care se realizează prin oricare din probe(adică are loc pentru orice efectuare a experienţei).

Notaţie 6.1.23. Notăm cu E(sau cu Ω) evenimentul sigur.

Exemplu 6.1.24. Obţinerea unuia dintre numerele 1, 2, ..., 6, la aruncarea unui zar.

Definiţie 6.1.25. Dacă A este un eveniment, se numeşte **evenimentul contrar**(sau **complementar**)**evenimentului** A, evenimentul care se realizează atunci şi numai atunci când nu se realizează A.

Notaţie 6.1.26. Notăm evenimentul contrar lui A cu $\overline{A}$ sau $\mathcal{C}_\Omega A$.

Observaţie 6.1.27. a) $\overline{\emptyset} = \Omega$
b) $\overline{\Omega} = \emptyset$
c) $\overline{\overline{A}} = A$(i.e., $\mathcal{C}_\Omega(\mathcal{C}_\Omega A) = A$).

Relaţii între evenimente

Definiţie 6.1.28. Spunem că două evenimente A şi B, asociate efectuării unei experienţe, sunt **echivalente** dacă ele se realizează simultan.

Notaţie 6.1.29. Atunci când A şi B sunt două evenimente echivalente, notăm $A = B$(deoarece mulţimea probelor prin care se realizează A coincide cu mulţimea probelor prin care se realizează B).

Definiţie 6.1.30. Pentru două evenimente A şi B, spunem că A **implică** B prin definiţie dacă pentru orice realizare a evenimentului A se realizează şi evenimentul B.

Notaţie 6.1.31. Dacă A implică B, vom nota $A \subseteq B$(deoarece mulţimea probelor evenimentului A este atunci inclusă în mulţimea probelor evenimentului B).

Observaţie 6.1.32. Pentru orice eveniment A au loc

$$\emptyset \subseteq A \qquad \text{şi} \quad A \subseteq \Omega\,.$$

Observaţie 6.1.33. Relaţia de **implicaţie** este o **relaţie de ordine**, adică are proprietăţile:
1. **reflexivitate**: $A \subseteq A$, $(\forall)A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. **antisimetrie**: $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.
3. **tranzitivitate**: $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

Operaţii cu evenimente

Definiţie 6.1.34. Se numeşte **reuniunea** a două evenimente A şi B, evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre evenimentele A şi B.

Notaţie 6.1.35. $A \cup B$.

Definiţie 6.1.36. Se numeşte **intersecţia** a două evenimente A şi B, evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează simultan evenimentele A şi B.

Notaţie 6.1.37. $A \cap B$.

Observaţie 6.1.38. În mod asemănător se definesc reuniunea şi intersecţia unei familii oarecare(finite sau infinite) de evenimente $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$:
Reuniunea $\bigcup_{i\in I} A_i$ se realizează o dată cu realizarea cel puţin unuia dintre evenimentele A_i.
Intersecţia $\bigcap_{i\in I} A_i$ se realizează o dată cu realizarea simultană a tuturor evenimentelor A_i.

Observaţie 6.1.39. Reuniunea şi intersecţia evenimentelor sunt operaţii asociative şi comutative:

$$\begin{array}{cc} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \end{array}$$

Definiţie 6.1.40. Numim **diferenţa** evenimentelor A şi B evenimentul care se realizează atunci când se realizează A şi nu se realizează B.

Notaţie 6.1.41. $A \setminus B$.

Observaţie 6.1.42. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \mathcal{C}_\Omega B$.

Definiţie 6.1.43. Evenimentele A şi B se numesc **incompatibile** dacă $A \cap B = \emptyset$.
În caz contrar, evenimentele se numesc **compatibile**.

Câmp de evenimente

Fie Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unei experienţe aleatoare $\mathcal{E}$, ω o probă, $\mathcal{P}(\Omega)$ mulţimea părţilor(submulţimilor) lui Ω, iar A, B, C, ... evenimente aleatoare asociate experienţei.

Familia tuturor evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare $\mathcal{E}$ este definită de o familie $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ cu următoarele proprietăţi:

Definiţie 6.1.44. Se numeşte **corp de evenimente**(sau **algebră de părţi**) **pe** Ω o familie $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică următoarele condiţii:
1) $\Omega \in \mathcal{K}$;
2) $A \in \mathcal{K} \Longrightarrow \mathcal{C}_\Omega A = \overline{A} \in \mathcal{K}$;
3) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$.

Observaţie 6.1.45. Proprietatea 3) se poate generaliza imediat:

$$3') \quad A_i \in \mathcal{K},\ i = \overline{1,n} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}.$$

Propoziţie 6.1.46. *Fie $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un corp de evenimente pe Ω. Atunci au loc*
a) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$ (mai general, avem că $A_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1,n}$ $\Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}$).
b) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Demonstraţie. a) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{K} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{K}$. Avem însă

$$\begin{aligned} \overline{A} \cup \overline{B} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\} \cup \{\omega \in \Omega | \omega \notin B\} = \\ = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A \vee \omega \notin B\} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A \cap B\} = \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

(am demonstrat astfel că $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, adică reuniunea complementarelor a două mulţimi este complementara intersecţiei celor două mulţimi). Astfel

$$\left.\begin{array}{lcl} A \in \mathcal{K} & \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} & \overline{A} \in \mathcal{K} \\ B \in \mathcal{K} & \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} & \overline{B} \in \mathcal{K} \end{array}\right\} \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{K} \Longrightarrow \overline{A \cap B} \in \mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} \overline{\overline{A \cap B}} \in \mathbf{K} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{K}.$$

b)

$$\left.\begin{array}{lcl} A \setminus B & = & A \cap \overline{B} \\ & & A \in \mathcal{K} \\ B \in \mathcal{K} & \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} & \overline{B} \in \mathcal{K} \end{array}\right\} \stackrel{\text{a)}}{\Longrightarrow} A \cap \overline{B} \in \mathcal{K}.$$

$\square$

Observaţie 6.1.47. Legile lui de Morgan sunt proprietăţi valabile pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{A \cap B} & = & \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} & = & \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}}$$

Observaţie 6.1.48. Legile lui de Morgan se pot generaliza la un număr oarecare de submulţimi ale lui Ω:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i} & = & \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \\ \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} & = & \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i} \end{array}$$

Definiţie 6.1.49. O pereche $(\Omega, \mathcal{K})$, în care $\mathcal{K}$ este un corp de evenimente, se numeşte **câmp de evenimente**.

Exemplu 6.1.50. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, ω_i - evenimente elementare. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^n$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega) \Longrightarrow (\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ - câmp (finit) de evenimente.

6.1.3 Noţiunea de probabilitate

Definiţia statistică a probabilităţii

Fie $\mathcal{E}$ o experienţă aleatoare şi A un eveniment aleator asociat experienţei $\mathcal{E}$. Fie $n \in \mathbf{N}$ un număr natural. Repetăm experienţa $\mathcal{E}$ de n ori în condiţii identice şi notăm cu n_A numărul de realizări ale evenimenului A, numit **frecvenţă absolută** a evenimentului A.

Definiţie 6.1.51. Se numeşte **frecvenţă relativă** a lui A pe parcursul unei serii de n efectuări ale experienţei $\mathcal{E}$, numărul

$$\boxed{f_n(A) = \tfrac{n_A}{n}}$$

Observaţie 6.1.52. Deoarece frecvenţa absolută a unui eveniment A pe parcursul unei serii de n efectuări ale unei experienţe aleatoare $\mathcal{E}$ poate fi cel mult n,

$$0 \leq n_A \leq n \ \mid : n \implies 0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$$

Definiţie 6.1.53. Dacă în cazul în care n ia valori foarte mari, frecvenţa relativă $f_n(A)$ a unui eveniment A oscilează în jurul unei anumite constante reale, aceasta se numeşte **probabilitatea statistică a evenimentului** A şi se notează $P(A)$.

Definiţia clasică a probabilităţii

Exemplu 6.1.54. Considerăm experienţa aleatoare care constă în "aruncarea unui zar(cinstit)", pentru care mulţimea probelor este $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Şansa de apariţie a fiecărei feţe este $\frac{1}{6}$.

Fie $\mathcal{E}$ o experienţă aleatoare, având mulţimea probelor $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar ω_i - evenimente elementare.

Definiţie 6.1.55. Spunem că rezultatele unei experienţe aleatoare $\mathcal{E}$ sunt **echiprobabile(egal probabile)** dacă au aceeaşi şansă de realizare în orice efectuare a experienţei $\mathcal{E}$.

Numim evenimentele echiprobabile şi cazuri. Dacă presupunem că evenimentele elementare $(\omega_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt echiprobabile, şansa de apariţie a evenimentului elementar ω_i este $\frac{1}{n}$.

Definiţie 6.1.56. Numim **probabilitate a evenimentului elementar** ω_i numărul $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$.

Definiţie 6.1.57. Fie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un eveniment aleator. **Probabilitatea evenimentului** A este numărul

$$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{n_A}{n}$$

unde n_A este numărul rezultatelor favorabile realizării evenimentului A.

Maimuţa şi tastatura. *O maimuţă aşezată în faţa unui calculator loveşte cele 26 de taste corespunzătoare literelor şi bara de spaţiu la întâmplare. Care este probabilitatea ca primele 39 de caractere(incluzând şi spaţiile) să fie "to be or not to be that is the question"?*
Numărul de texte de lungime 39 care se pot obţine folosind cele 26 de litere şi caracterul spaţiu este 27^{39}*. Dintre acestea, doar unul corespunde citatului hamletian "to be or ...". Probabilitatea căutată este deci*

$$P = \frac{1}{27^{39}} \approx 0,15025 \cdot 10^{-55}\,.$$

Observaţie 6.1.58. Definiţia clasică a probabilităţii se poate aplica <u>numai</u> pentru experienţe cu evenimente elementare echiprobabile.

Propoziţie 6.1.59. *Probabilitatea (clasică) are următoarele proprietăţi:*
1) $0 \le P(A) \le 1$, $(\forall) A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.
3) Dacă $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *sunt evenimente incompatibile(adică, cu proprietatea că* $A \cap B = \emptyset$*), atunci* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5) Dacă $A \subseteq B$*, atunci* $P(A) \le P(B)$.
6) Dacă $A \subseteq B$*, atunci* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Problema acului lui Bufon. *Savantul francez G.L.Buffon a considerat următoarea problemă: Un ac de lungime* l *este aruncat la întâmplare pe o podea, pe care sunt trasate linii paralele la distanţă* $d(d > l)$ *între ele. Care este probabilitatea ca acul să atingă vreuna dintre linii?*
Câmpul de evenimente corespunzător experienţei nu este unul finit (nici măcar discret, de altfel), astfel că definiţia clasică nu poate

fi aici folosită, decât cu greutate. Probabilitatea care se obţine are valoarea

$$P = \frac{2l}{\pi d}\,.$$

Buffon a încercat să folosească acest rezultat pentru a calcula valoarea numărului π. Aruncând un ac de peste 5000 de ori pe podea, el a reuşit să obţină valoarea lui π cu o zecimală exactă!

Definiţia axiomatică a probabilităţii

Fie $(\Omega,\, \mathcal{K})$ un câmp de evenimente.

Definiţie 6.1.60. O probabilitate pe câmpul $(\Omega,\, \mathcal{K})$ este o funcţie $P : \mathcal{K} \longrightarrow [0, 1]$, care verifică axiomele
1) $P(\Omega) = 1$
2) $(\forall)A, B \in \mathcal{K},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Definiţie 6.1.61. Un câmp de evenimente $(\Omega,\, \mathcal{K})$, înzestrat cu o funcţie de probabilitate P, se numeşte **câmp de probabilitate** şi se notează $(\Omega,\, \mathcal{K},\, P)$.

Propoziţie 6.1.62. *Fie $(\Omega,\, \mathcal{K},\, P)$ un câmp de probabilitate. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*
1) $0 \le P(A) \le 1,\ (\forall)A \in \mathcal{K}$.
2) $P(\emptyset) = 0$.
3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B),\ (\forall)A, B \in \mathcal{K}$.
5) Dacă $B \subseteq A$, atunci $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
6) Dacă $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{K}$, cu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall)i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, atunci

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(proprietatea de aditivitate finită).
7) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$, atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

8) Dacă $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{K}$*, atunci*

$$\boxed{\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \end{aligned}}$$

*(***formula lui Poincaré***).*
9) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
10) Dacă $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{K}$*, atunci*

$$\boxed{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)}$$

*(***inegalitatea lui Boole***).*

Definiţie 6.1.63. Fie $\Omega \neq \emptyset$. O familie $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ se numeşte σ**-corp de evenimente**(sau σ**-algebră de părţi**) dacă are proprietăţile:
1) $\Omega \in \mathcal{K}$
2) $A \in \mathcal{K} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{K}$
3) $(\forall)(A_i)_{i\ge 1} \subseteq \mathcal{K} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$.

Definiţie 6.1.64. Dacă $\Omega \neq \emptyset$, un cuplu $(\Omega, \mathcal{K})$, în care $\mathcal{K}$ este un σ-corp de evenimente, se numeşte σ**-câmp de evenimente**.

Definiţie 6.1.65. Se numeşte **probabilitate** pe σ-câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ o funcţie $P : \mathcal{K} \longrightarrow [0,1]$ care verifică axiomele:
1) $P(\Omega) = 1$
2) Dacă $(A_i)_{i\in \mathbf{N}^*} \subseteq \mathcal{K}$ este o familie numărabilă oarecare de evenimente incompatibile două câte două, atunci

$$P(\bigcup_{i\ge 1} A_i) = \sum_{i\ge 1} P(A_i)$$

Definiţie 6.1.66. Un σ**-câmp de probabilitate** este un σ-câmp de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$, împreună cu o funcţie de probabilitate P, notat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Propoziţie 6.1.67. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un* σ*-câmp de probabilitate. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*
a) Dacă $(A_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{K}$ *este un şir ascendent de evenimente, adică un şir pentru care* $A_n \subseteq A_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, *atunci*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{i\geq 1} A_i)$$

b) Dacă $(A_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{K}$ *este un şir descendent de evenimente, i.e.,* $A_{n+1} \subseteq A_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, *atunci*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i\geq 1} A_i)$$

Probabilităţi condiţionate

Considerăm un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ şi $B \in \mathcal{K}$ cu $P(B) > 0$(i.e. $P(B) \neq 0$)

Definiţie 6.1.68. Dacă $A \in \mathcal{K}$ este un eveniment, se numeşte **probabilitatea condiţionată de evenimentul** B **a evenimentului** A(sau **probabilitatea lui** A **condiţionat de** B) numărul

$$\boxed{P_B(A) = P(A|B) = \tfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Analog, dacă $P(A) > 0$, putem defini **probabilitatea evenimentului** B **condiţionat de** A:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Propoziţie 6.1.69. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un* $(\sigma$*-)câmp de probabilitate şi* $B \in \mathcal{K}$ *un eveniment cu* $P(B) > 0$*. Atunci funcţia* P_B *reprezintă o probabilitate pe* $(\Omega, \mathcal{K})$*, adică verifică axiomele*
1) $0 \leq P_B(A) \leq 1$, $(\forall)A \in \mathcal{K}$
2) $P_B(\Omega) = 1$
3) $P_B(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P_B(A_2)$, $(\forall)A_1, A_2 \in \mathcal{K}$, *cu* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
(respectiv 3' $P_B(\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i) = \sum\limits_{i\geq 1} P(A_i)$, $(\forall)(A_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{K}$*, astfel încât* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall)i, j \geq 1$, $i \neq j$*)*

Observaţie 6.1.70. a) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ sunt evenimente cu proprietatea că $P(A), P(B) > 0$, atunci din

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{şi} \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

obţinem că

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}$$

b) **Dacă** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, atunci din egalităţile de mai sus obţinem că

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{şi} \qquad P_A(B) = P(B)$$

Evenimente independente

Definiţie 6.1.71. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un $(\sigma$-)câmp de probabilitate şi $A, B \in \mathcal{K}$ două evenimente. A şi B se numesc **evenimente independente** dacă

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Definiţie 6.1.72. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un $(\sigma$-)câmp de probabilitate şi $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{K}$ o familie de evenimente. Evenimentele A_i, $i = \overline{1,n}$ se numesc evenimente independente dacă pentru orice $1 \leq k \leq n$ şi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Legea probabilităţii totale. Formula lui Bayes

Definiţie 6.1.73. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un $(\sigma$-)câmp de probabilitate şi o familie de evenimente $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$. Spunem că evenimentele A_i, $i = \overline{1,n}$ formează un **sistem complet de evenimente** dacă

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$

3) $P(A_i) > 0$, $(\forall) i = \overline{1,n}$.

Propoziţie 6.1.74. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un $(\sigma$-)câmp de probabilitate şi $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem complet de evenimente. Pentru orice eveniment $B \in \mathcal{K}$ avem atunci:*

*a)(***Legea probabilităţii totale***)*

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}$$

*b)(***Formula lui Bayes***) Dacă $P(B) > 0$, atunci pentru orice indice $k \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\boxed{P_B(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}}$$

Demonstraţie. a)

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)$$

b)

$$P_B(A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} \overset{a)}{=} \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}$$

$\square$

6.1.4 Scheme clasice de probabilitate

Schemele clasice de probabilitate permit calculul probabilităţii unor evenimente compuse folosind idei simple de analiză combinatorie.

Schema lui Bernoulli

Să presupunem că probabilitatea apariţiei unui anumit eveniment A în urma efectuării unei experienţe aleatoare este p, iar probabilitatea apariţiei evenimentului contrar $\overline{A}$ este $q = 1 - p$. Dacă experienţa aleatoare se repetă în condiţii identice şi independente de n ori, probabilitatea ca în cele n experienţe evenimentul A să apară de exact k ori este

$$P(n;k) = C_n^k p^k q^{n-k}\,.$$

Observaţie 6.1.75. Probabilitatea $P(n;k)$ se poate obţine citind coeficientul lui X^k din dezvoltarea binomului $(pX+q)^n$. Din acest motiv, această schemă de calcul se mai numeşte şi **schema binomială**.

Observaţie 6.1.76. Schema lui Bernoulli poate fi realizată printr-o urnă cu bile de două culori(de ex., albe şi negre), din care se extrage pe rând şi în mod aleator câte o bilă, se notează rezultatul şi apoi se repune bila în urnă. Dacă numărul bilelor albe este a, iar al celor negre b, evenimentul A este cel ca la o extragere să se obţină o bilă albă, şi notăm cu $P(n;k)$ probabilitatea ca din n extrageri să se obţină de exact k ori o bilă albă, atunci

$$p = P(A) = \frac{a}{a+b}\,, \quad q = P(\overline{A}) = 1 - p = \frac{b}{a+b}$$

şi

$$P(n;k) = C_n^k \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k p^k q^{n-k}\,.$$

Datorită acestei prezentări, schema lui Bernoulli se mai numeşte **schema bilei revenite**.

Schema lui Bernoulli admite două generalizări importante: **schema lui Bernoulli cu mai multe stări** şi **schema lui Poisson**.

Schema lui Bernoulli cu mai multe stări

Să presupunem că unei experienţe aleatoare îi putem asocia un sistem complet de evenimente $\{A_i | i = \overline{1,s}\}$(numite stări), cu probabilităţile

$$p_i = P(A_i)\ ,\ i = \overline{1,s}\,, \quad \text{cu} \quad \sum_{i=1}^{s} p_i = 1\,.$$

Dacă experienţa se repetă de n ori în condiţii identice şi independente, probabilitatea $P(n; k_1, k_2, \ldots, k_s)$ ca evenimentul A_1 să apară de exact k_1 ori, A_2 de k_2, ..., A_s de k_s ori, unde $k_1+k_2+\ldots+k_s = n$, este

$$P(n; k_1, k_2, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}\,.$$

Observaţie 6.1.77. Probabilitatea $P(n; k_1, k_2, \ldots, k_s)$ se poate determina citind coeficientul termenului care conţine $X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_s^{k_2}$ din dezvoltarea polinomonului $(p_1X_1 + p_2X_2 + \ldots + p_sX_s)^n$. Din acest motiv, schema lui Bernoulli cu mai multe stări se mai numeşte şi **schema polinomială** sau **schema multinomială**.

Observaţie 6.1.78. Schema lui Bernoulli este cazul particular pentru $s = 2$ al schemei multinomiale, considerând sistemul complet de evenimente $\{A_1 = A, A_2 = \overline{A}\}$, $p_1 = p$, $p_2 = q(= 1 - p)$, $k_1 = k$, $k-2 = n-k$, şi notând $P(n; k)$ pentru $P(n; k_1, k_2) = P(n; k, n-k)$.

Schema lui Poisson

Această schemă reprezintă o altă generalizare a schemei lui Bernoulli.

Considerăm n experienţe aleatoare independente distincte, pentru care suntem interesaţi în cazul fiecăruia de producerea câte unui anumit eveniment A_i, având probabilitatea p_i, respectiv a evenimentului $\overline{A_i}$, complementar lui A_i, care are probabilitatea $q_i = 1 - p_i$. În aceaste condiţii, probabilitatea $P(n; k)$ ca în exact k dintre cele n experienţe aleatoare să apară unul dintre evenimentele A_i, iar în celelalte $n - k$ să apară evenimentele complementare $\overline{A_i}$,

se obţine citind coeficientul termenului de grad k din dezvoltarea polinomului

$$(p_1X + q_1)(p_2X + q_2) \dots (p_nX + q_n)\,.$$

Observaţie 6.1.79. Schema lui Bernoulli este cazul particular al schemei lui Poisson în care toate experienţele aleatoare considerate sunt identice, cu evenimentele $A_1 = A_2 = \dots = A_n \stackrel{not}{=} A$, iar $p_1 = p_2 = \dots = p_n \stackrel{not}{=} p$.

Schema bilei nerevenite

Această schemă se poate reprezenta prin următorul experiment aleator compus(de la care îi şi vine denumirea):

Dintr-o urnă în care se găsesc a bile albe şi b bile negre se extrag, fără a fi repuse înapoi în urnă, n bile, unde $n \leq a+b$. Probabilitatea $\tilde{P}(n;k)$ ca exact k dintre bilele extrase să fie albe este atunci

$$\tilde{P}(n;k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}\,.$$

6.2 Variabile aleatoare

6.2.1 Consideraţii introductive. Clasificări

Definiţie 6.2.1. Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ mulţimea evenimentelor elementare asociate unei experienţe aleatoare $\mathcal{E}$. Fiecare eveniment ω_k, $k = \overline{1,n}$, se realizează printr-o singură probă.

Studiul unei mulţimi de evenimente elementare se poate reduce la studiul unei mulţimi de numere astfel:
- fiecărui eveniment elementar ω_k îi asociem un număr real x_k.
- fiecare număr real va avea o anumită probabilitate, anume probabilitatea $P(\omega_k)$ a evenimentului căruia îi corespunde numărul real dat.

O corespondenţă definită între mulţimea Ω a evenimentelor elementare şi o submulţime a mulţimii numerelor reale, cu proprietăţile de mai sus, se numeşte **variabilă aleatoare**.

Exemplu 6.2.2. Considerăm experienţa măsurării pulsului unei persoane în diferite momente ale zilei: treaz, dormind, în rimpul sau/şi la un anumit timp după efectuarea unor exerciţii solicitante. Pulsul este o variabilă şi fiecare măsurare a lui este o observaţie a acestei variabile.

Definiţie 6.2.3. Clasificări:
Variabilele aleatoare pot fi:
A) variabile calitative - sunt variabile care iau valori diferite sau fac parte din clase diferite.
a_1**)** categoriale: de ex. maşină/ autobus/ tren/ avion/ mersul pe jos, masculin/ feminin
a_2**)** categoriale ordonate: de ex. nefumător/ fumător ocazional/ fumător moderat/ fumător înrăit
B) variabile cantitative - sunt variabile care iau valori numerice
b_1**)** discrete: de ex. nr. de copii, nr. de cazuri de boală
b_2**)** continue: de ex. temperatura, tensiunea unei persoane

Observaţie 6.2.4. Un caz particular îl formează variabilele binare care iau o valoare din două posibile, de ex. adevărat/fals, masculin/feminin, vaccinaţi/nevaccinaţi(în cazul studiului unui grup de copii asupra stării de vaccinare).

Observaţie 6.2.5. 1) Variabilele calitative sunt discrete.
2) Variabilele cantitative continue pot avea valorile grupate în clase (sau intervale) şi pot fi prezentate ca variabile discrete sau categorial-ordonate.

6.2.2 Variabile aleatoare discrete

1. Definiţii. Proprietăţi

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiţie 6.2.6. O funcţie $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ se numeşte **variabilă aleatoare** dacă pentru orice număr real $a \in \mathbf{R}$, mulţimea preimagine $X^{-1}(a) = \{\omega \in \Omega |\, X(\omega) < a\} \in \mathcal{K}$.

Definiţie 6.2.7. O variabilă aleatoare X se numeşte **discretă** dacă există o mulţime cel mult numărabilă $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbf{R}$ $(I \approx \mathbf{N})$, cu proprietatea că $Im(X) \subseteq \{x_i\}_{i\in I}$, adică mulţimea valorilor variabilei aleatoare X este cel mult numărabilă.

Definiţie 6.2.8. O variabilă aleatoare discretă X se numeşte **variabilă aleatoare discretă simplă** dacă ia valori dintr-o mulţime finită

$$Im(X) \subseteq \{x_i\}_{i=\overline{1,n}}.$$

Notaţie 6.2.9. Pentru evenimentul $A_i = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$, cu $i = \overline{1,n}$ sau $i \in I$, notăm mai simplu $A_i = \{X = x_i\}$ sau $X = x_i$. Probabilitatea evenimentului A_i o notăm $p_i = P(A_i) = P(X = x_i)$.

Observaţie 6.2.10. 1) $p_i \geq 0$, $(\forall) i = \overline{1,n}$(resp. $i \in I$)
2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (resp. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$)

Definiţie 6.2.11. Numim **repartiţia(**sau **distribuţia) de probabilitate** a variabilei aleatoare discrete simple X un tablou format din două linii:
- pe prima linie punem valorile variabilei $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots)$
- pe a doua linie, probabilităţile corespunzătoare $(p_1\, p_2\, p_3 \ldots)$:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Prescurtat scriem $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}$.

Exemplu 6.2.12. Repartiţia variabilei aleatoare asociate tabelului de mai sus este

$$X : \begin{pmatrix} 80 & 100 & 120 & 140 & 160 & 180 & 200 \\ 0,022 & 0,20 & 0,222 & 0,289 & 0,089 & 0,155 & 0,022 \end{pmatrix}$$

Propoziţie 6.2.13. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Demonstraţie. Deoarece $p_i = P(X = x_i)$, $i = \overline{1,n}$, iar evenimentele $\{X = x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ formează un sistem complet de evenimente, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\{X = x_i\}) = P(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}) = P(\Omega) = 1.$$

$\square$

Observaţie 6.2.14. Pentru o variabilă aleatoare X se pot considera evenimentele:
$\{X < x\} \overset{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$,
$\{X \leq x\} \overset{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$,
$\{X > x\}$, $\{X \geq x\}$,
$\{a < X < b\}$, $\{a \leq X < b\}$, $\{a < X \leq b\}$, $\{a \leq X \leq b\}$, $(a, b \in \mathbf{R})$.

2. Operaţii cu variabile aleatoare discrete simple

Definiţie 6.2.15. Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete simple cu repartiţiile de probabilitate

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \; p_i = P(X = x_i),\; i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j=\overline{1,m}}, \; q_j = P(Y = y_j),\; j = \overline{1,m}, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

1. Produsul cu o constantă reală $\alpha \in \mathbf{R}$ al variabilei aleatoare discrete X este variabila aleatoare discretă αX, cu repartiţia

$$\alpha X : \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}$$

2. Suma variabilelor aleatoare discrete X şi Y este variabila aleatoare discretă $X + Y$, cu repartiţia

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & \dots & x_1 + y_m & x_2 + y_1 & \dots & x_n + y_m \\ p_{11} & \dots & p_{1m} & p_{21} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

unde $p_{ij} = P(\{X = x_i \wedge Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Avem $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

3. Produsul variabilelor aleatoare discrete X şi Y este variabila aleatoare discretă $X \cdot Y$, cu repartiţia

$$X \cdot Y : \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_m & x_2y_1 & \dots & x_2y_m & \dots & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} & p_{21} & \dots & p_{2m} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

4. Puterea k a unei variabile aleatoare discrete X este variabila aleatoare discretă X^k, cu repartiţia

$$X^k : \begin{pmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_i^k & \dots & x_n^k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Avem că $P(X^k = x_i^k) = P(X = x_i) = p_i$.

5. Inversa unei variabile aleatoare discrete X este variabila aleatoare discretă X^{-1}, cu repartiţia

$$X^{-1} : \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_i} & \dots & \frac{1}{x_n} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

6. Raportul a două variabile aleatoare discrete X şi Y este variabila aleatoare discretă $\frac{X}{Y}$, cu repartiţia

$$\frac{X}{Y} : \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_1}{y_2} & \dots & \frac{x_1}{y_m} & \frac{x_2}{y_1} & \dots & \frac{x_2}{y_m} & \dots & \frac{x_n}{y_m} \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} & p_{21} & \dots & p_{2m} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

6.2.3 Variabile aleatoare independente

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi X, Y două variabile aleatoare.

Definiţie 6.2.16. Variabilele aleatoare X şi Y se numesc **independente** dacă

$$P(\{X < x, Y < y\}) = P(\{X < x\}) \cdot P(\{Y < y\}) \quad , (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

Propoziţie 6.2.17. *Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete, cu repartiţiile de probabilitate*

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \; p_i = P(X = x_i),\; i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j=\overline{1,m}}, \; q_j = P(Y = y_j),\; j = \overline{1,m}, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$$

Atunci variabilele X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă

$$P(\{X = x_i,\, Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\}) \cdot P(\{Y = y_j\})\,,$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Definiţie 6.2.18. Variabilele aleatoare $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ sunt independente dacă pentru orice număr $1 \leq k \leq n$, orice indice $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ şi orice $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$ are loc

$$P(\{X_{i_1} < a_1,\, X_{i_2} < a_2,\, \ldots,\, X_{i_k} < a_k\}) =$$
$$= P(\{X_{i_1} < a_1\}) \cdot P(\{X_{i_2} < a_2\}) \cdot \ldots \cdot P(\{X_{i_k} < a_k\})$$

6.2.4 Funcţii de repartiţie

Fie $(\Omega,\, \mathcal{K},\, P)$ un câmp de probabilitate şi X o variabilă aleatoare.

Definiţie 6.2.19. Funcţia $F_X : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$, definită prin

$$F_X(x) = P(\{X < x\})$$

se numeşte **funcţia de repartiţie** a variabilei aleatoare X.

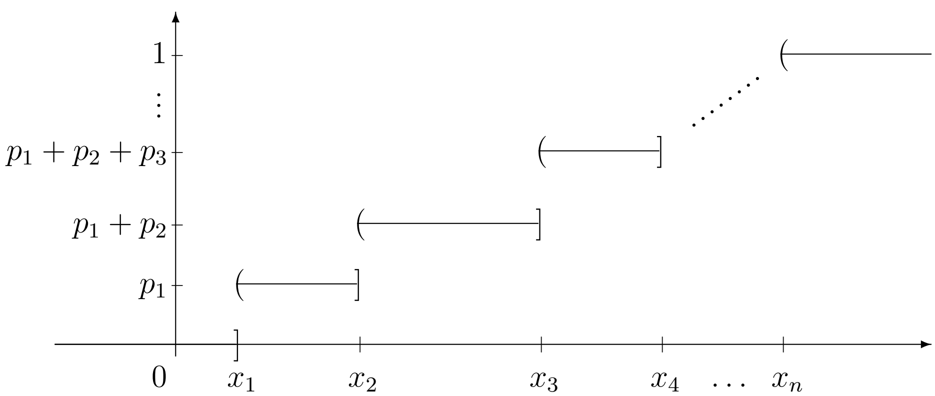
Observaţie 6.2.20. Pentru cazul unei variabile aleatoare discrete X,

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \; p_i = P(X = x_i),\; i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

funcţia de repartiţie este dată de

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq x_1 \\ p_1 & , \text{ dacă } x \in (x_1, x_2] \\ p_1 + p_2 & , \text{ dacă } x \in (x_2, x_3] \\ \ldots & \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_i & , \text{ dacă } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1 & , \text{ dacă } x > x_n \end{cases}$$

şi are reprezentarea grafică



Funcţie de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete

Propoziţie 6.2.21. Dacă F_X este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X, atunci
1) $P(\{a \leq X < b\}) = F_X(b) - F_X(a)$, $(\forall) a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.
2) F_X este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$

$$(\forall) x, y \in \mathbf{R}\,, \quad x < y \Longrightarrow F_X(x) \leq F_X(y).$$

3) F_X este continuă la stânga în orice punct $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y) = F_X(x).$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

Observaţie 6.2.22. Probabilitatea ca variabila X să ia valoarea x este
$$P(\{X = x\}) = F_X(x+0) - F_X(x) \qquad (*)$$

6.2.5 Variabile aleatoare continue

Definiţie 6.2.23. Dacă X este o variabilă aleatoare, spunem că X este o **variabilă aleatoare continuă** dacă funcţia sa de repartiţie F_X este o funcţie continuă.

Observaţie 6.2.24. Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, atunci
$$P(\{X = x\}) = 0 \qquad \text{(din (*))}$$

Definiţie 6.2.25. Spunem că variabila aleatoare X admite o **densitate de probabilitate** sau **densitate de repartiţie** dacă există o funcţie integrabilă $f : \mathbf{R} \longrightarrow [0,\infty)$ astfel încât
$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad , (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Funcţia f se numeşte **funcţie de densitate de repartiţie**(sau **de probabilitate**).

Observaţie 6.2.26. Dacă f este o funcţie de densitate de repartiţie, atunci
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Definiţie 6.2.27. Dacă variabila aleatoare continuă X admite densitatea de repartiţie f, iar $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, atunci
$$P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Observaţie 6.2.28. Dacă $Im(X) \subseteq [a, b]$, atunci

$$P(a \leq X < b) = P(\Omega) = 1 \Longrightarrow \int_a^b f(t)\, dt = 1.$$

6.2.6 Câteva caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Cuantile. Mediană. Modul

Definiţie 6.2.29. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

o variabilă aleatoare, cu funcţia de repartiţie asociată F_X. Pentru un număr $\alpha \in [0, 1]$, se numeşte **cuantilă de ordin** α o valoare $x_\alpha \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că

$$F_X(x_\alpha) \leq \alpha \leq F_X(x_\alpha + 0)$$

Observaţie 6.2.30. Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, inegalităţile de mai sus se pot înlocui cu

$$F_X(x_\alpha) = \alpha$$

Definiţie 6.2.31. Cuantila de ordin $\frac{1}{2}$ a unei variabile aleatoare X se numeşte **mediană** sau **valoare mediană**, şi este notată Me.

Definiţie 6.2.32. Cuantilele de ordin $\frac{1}{4}$, respectiv $\frac{3}{4}$, se numesc **cuartila inferioară**, respectiv **cuartila superioară**, şi se notează Q_1, respectiv Q_3.

Definiţie 6.2.33. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ o variabilă aleatoare

a) Dacă $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$, este discretă, o valoare x_{i_0} se numeşte

valoare modală, **modă** sau **modul**, şi se notează Mo, dacă $p_{i_0} = max\{p_i|i \in I\}$.
b) Dacă X este continuă, cu funcţia de densitate de repartiţie f, o valoare x_0 se numeşte **valoare modală**, dacă $f(x_0) = max\, f(x)$.

Medii şi momente pentru variabile aleatoare discrete

Fie X o variabilă aleatoare discretă, $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbf{N}$.

Definiţie 6.2.34. Media variabilei X, notată $M(X)$ sau $\overline{x}$, este numărul real

$$M(X) = \sum_{i\in I} x_i \cdot p_i$$

Observaţie 6.2.35. Proprietăţi.
1. $M(a) = a$, dacă a este o constantă.
2. $M(aX) = aM(X)$ (proprietatea de omogenitate)
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ (proprietatea de aditivitate)
4. $M(X + a) = M(X) + a$
5. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente.

Observaţie 6.2.36. Proprietăţile (3) şi (5) de mai sus se pot generaliza:
(3′) $M(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n M(X_i)$
(5′) $M(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n M(X_i)$, dacă X_i, $i = \overline{1, n}$, sunt variabile aleatoare independente.

Observaţie 6.2.37. Media $M(X)$ reprezintă valoarea în jurul căreia se grupează valorile variabilei aleatoare discrete X.

Definiţie 6.2.38. Fie X o variabilă aleatoare discretă şi $r \geq 1$. **Momentul de ordin** r al variabilei X este valoarea medie a variabilei X^r:

$$M_r(X) = M(X^r) = \sum_{i=1}^n x_i^r \cdot p_i$$

Observaţie 6.2.39. $M_1(X) = M(X)$, adică momentul de ordin 1 al variabilei X coincide cu media variabilei.

Definiţie 6.2.40. Momentul absolut de ordin r al variabilei X este

$$\overline{M_r}(X) = M(|X|^r) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \cdot p_i$$

Definiţie 6.2.41. Momentul centrat de ordin r al variabilei X, notat $\mu_r(X)$, este momentul de ordin r al variabilei $X - M(X)$:

$$\mu_r(X) = M_r(X - M(X)) = M((X - M(X))^r) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^r \cdot p_i$$

Observaţie 6.2.42. Variabila $X - M(X)$ se numeşte abaterea variabilei X de la medie. Pentru aceasta are loc

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$$

Medii şi momente pentru variabile aleatoare continue

Fie X o variabilă aleatoare continuă, având funcţia de densitate de repartiţie f.

Definiţie 6.2.43. Media variabilei X este numărul

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

Observaţie 6.2.44. Proprietăţile (1)-(5) ale mediilor variabilelor aleatoare au loc şi în cazul variabilelor aleatoare continue.

Definiţie 6.2.45. Momentul de ordin r **al variabilei** X este

$$M_r(X) = M(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

Definiţie 6.2.46. Momentul absolut de ordin r al variabilei X este

$$\overline{M_r}(X) = M_r(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

Definiţie 6.2.47. Momentul centrat de ordin r al variabilei X este

$$\mu_r(X) = M_r(X - M(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^r \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

Dispersia variabilelor aleatoare. Abaterea medie pătratică

Definiţie 6.2.48. Fie X o variabilă aleatoare(discretă sau continuă). **Dispersia**(sau **varianţa**) variabilei aleatoare X, notată $D^2(X)$ sau $\sigma^2(X)$, este momentul centrat de ordin 2 al lui X:

$$D^2(X) = \mu_2(X) = M((X - M(X))^2)$$

Observaţie 6.2.49. Proprietăţi.
1. $D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = M_2(X) - (M(X))^2$.
Într-adevăr, conform definiţiei dispersiei,

$$D^2(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 .$$

2. $D^2(a) = 0$.
3. $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$ (omogenitate).
4. $D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$, dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente(liniaritate).
5. $D^2(X + a) = D^2(X)$.

Observaţie 6.2.50. Din condiţiile (3) şi (4) rezultă că dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$D^2(aX + bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y) .$$

Definiţie 6.2.51. Abaterea medie pătratică (sau **standard**) a variabilei aleatoare X este

$$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{M((X - M(X))^2)} .$$

6.2.7 Normarea unei variabile aleatoare

Fie $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbf{N}$, unde $p_i \geq 0$, $(\forall) i \in I$, cu $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$, o variabilă aleatoare cu media $M(X)$ şi abaterea $\sigma(X)$.

Definiţie 6.2.52. O variabilă aleatoare Z, definită prin

$$Z = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}$$

se numeşte **variabilă aleatoare normată(standardizată)**. Pentru aceasta repartiţia este

$$Z : \begin{pmatrix} z_i = \frac{x_i - M(X)}{\sigma(X)} \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$$

Observaţie 6.2.53. a) Principalele caracteristici numerice asociate unei variabile aleatoare X sunt:
i) Media $M(X) = \sum\limits_{i\in I} x_i \cdot p_i$.
ii) Abaterea medie pătratică $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$.
iii) Dispersia $D^2(X) = M[(X - M(X))^2] = M(X^2) - (M(X))^2$.
b) Abaterea $X - M(X)$ este "măsurată" de Z în "unităţi standard" σ.

Propoziţie 6.2.54. *Dacă X este o variabilă aleatoare, cu variabila normată asociată Z, atunci*
1) $M(Z) = 0$,
2) $D^2(X) = 1$.

Demonstraţie. 1) Folosind proprietăţile mediei, avem

$$M(Z) = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)} \cdot M(X - M(X)) =$$

$$= \frac{1}{\sigma(X)} \cdot [M(X) - M(X)] = 0.$$

2) Pentru dispersie, ţinând cont de 1), obţinem

$$D^2(Z) = M[(Z - M(Z))^2] = M[(Z - 0)^2] = M(Z^2) =$$

$$= M\left[\left(\tfrac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right)^2\right] = M\left[\tfrac{X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2}{(\sigma(X))^2}\right] =$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \cdot [M(X^2) - M(2M(X) \cdot X) + (M(X))^2] =$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \cdot [M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2] =$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \cdot [M(X^2) - (M(X))^2] = \tfrac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)} = 1.$$

□

Definiţie 6.2.55. O variabilă aleatoare Y, care are proprietatea că $M(Y) = 0$ şi $D^2(Y) = 1$, se numeşte **variabilă aleatoare standardizată**.

6.3 Repartiţii discrete clasice

6.3.1 Repartiţia Bernoulli

Definiţie 6.3.1. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X are o **repartiţie Bernoulli de parametru** p, unde $0 \leq p \leq 1$, dacă ia valorile 1 şi 0 cu probabilităţile

$$P(X = 1) = p \quad \text{, respectiv} \quad P(X = 0) = 1 - p \overset{not}{=} q\,.$$

Notaţie 6.3.2. Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, având repartiţie Bernoulli de parametru p, notăm $X \sim B(p)$.

Observaţie 6.3.3. Tabloul de repartiţie al unei variabile aleatoare discrete X, cu $X \sim B(p)$ este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Propoziţie 6.3.4. *Dacă* $X \sim B(p)$, *atunci* $M(X) = p$ *şi* $D^2(X) = p \cdot q$.

Demonstraţie. Conform proprietăţilor mediei şi dispersiei,

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p\,,$$

$$M(X^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p\,,$$

şi

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q\,.$$

□

Observaţie 6.3.5. Dacă $X \sim B(p)$, atunci funcţia sa de repartiţie este dată de

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \\ q & , \text{ dacă } x \in (0, 1] \\ 1 & , \text{ dacă } x \in (1, \infty) \end{cases} \,.$$

Propoziţie 6.3.6. *Dacă* $X \sim B(p)$, *atunci funcţia sa caracteristică este dată de* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi(t) = p \cdot e^{it} + q\,.$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din definiţia funcţiei caracteristice φ_X asociate unei variabile aleatoare X,

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi_X(t) = M(e^{itX})\,.$$

□

6.3.2 Repartiţia binomială

Definiţie 6.3.7. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X are **o repartiţie binomială de parametri** n **şi** p, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $0 \le p \le 1$, dacă X ia valorile 0, 1, ..., n cu probabilităţile

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad , (\forall) k = \overline{0, n}\,,$$

unde $q = 1 - p$.

Notaţie 6.3.8. Notăm $X \sim Bin(n,p)$ dacă variabila aleatoare discretă X are repartiţia binomială de parametri n şi p.

Observaţie 6.3.9. Dacă $X \sim Bin(n,p)$, atunci X are tabloul de repartiţie

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}.$$

Observaţie 6.3.10. Pentru $n = 1$, avem $X \sim Bin(1,p)$ dacă şi numai dacă $X \sim B(p)$.

Propoziţie 6.3.11. *Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, atunci are loc $X \sim Bin(n,p)$ dacă şi numai dacă există n variabile aleatoare discrete independente $X_1, X_2, \dots, X_n$, cu $X_i \sim B(p)$, $(\forall) i = \overline{1,n}$, astfel încât $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.*

Demonstraţie. Dacă $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, cu $X_i \sim B(p)$ independente între ele, atunci ţinând cont de schema lui Bernoulli,

$$P(X=k) = P(n;k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad , (\forall) k = \overline{0,n}\,,$$

astfel că $X \sim Bin(n,p)$. □

Propoziţie 6.3.12. *Dacă $X \sim Bin(n,p)$, atunci*

$$M(X) = n \cdot p, \ \textit{iar}\ D^2(X) = n \cdot p \cdot q\,.$$

Demonstraţie. Folosind descompunerea $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, cu $X_i \sim B(p)$, independente între ele, rezultă că

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = n \cdot p\,,$$

respectiv

$$D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n) = n \cdot p \cdot q\,.$$

□

Propoziţie 6.3.13. *Dacă* $X \sim Bin(n, p)$*, atunci funcţia sa caracteristică este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = (p \cdot e^{it} + q)^n\,.$$

Demonstraţie. Folosind descompunerea $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, cu $X_i \sim B(p)$, independente între ele, avem că

$$\varphi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i} = (p \cdot e^{it} + q)^n\,.$$

□

Observaţie 6.3.14. Cu ajutorul funcţiei caracteristice, putem determina momentele unei variabile aleatoare X cu repartiţie binomială de parametri n şi p:

$$M_k(X) = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0)\,.$$

Astfel, cum

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t) = inpe^{it}(pe^{it} + q)^{n-1}\,,\\
&\varphi''(t) = i^2npe^{it}(pe^{it} + q)^{n-1} + i^2n(n-1)p^2e^{2it}(pe^{it} + q)^{n-2}\,,\\
&\varphi'''(t) = i^3npe^{it}(pe^{it} + q)^{n-1} + 3i^2n(n-1)p^2e^{2it}(pe^{it} + q)^{n-2} +\\
&\qquad + i^3n(n-1)(n-2)p^3e^{3it}(pe^{it} + q)^{n-3}\,, \ldots
\end{aligned}$$

avem că

$$\begin{aligned}
&M_1(X) = np\,,\\
&M_2(X) = np + n(n-1)p^2 = n^2p^2 + npq\,,\\
&M_3(X) = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3 =\\
&\quad = n^3p^3 + 3n^2p^2q + npq(1-2p)\,, \ldots
\end{aligned}$$

Propoziţie 6.3.15. *Fie* X_1 *şi* X_2 *două variabile aleatoare independente, cu* $X_1 \sim Bin(n_1, p)$*,* $X_2 \sim Bin(n_2, p)$*. Atunci* $X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$*.*

Demonstraţie. Dacă φ_1 şi φ_2 sunt funcţiile caracteristice asociate celor două variabile aleatoare independente, funcţia caracteristică asociată variabilei aleatoare X verifică egalitatea $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$. Rezultă că

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^{n_1} \cdot (pe^{it} + q)^{n_2} = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2},$$

astfel că $X \sim Bin(n_1 + n_2, p)$, conform teoremei de unicitate. □

6.3.3 Repartiţia binomială generalizată a lui Poisson

Definiţie 6.3.16. Spunem că variabilă aleatoare X are repartiţie binomială generalizată dacă există variabile aleatoare independente $X_1 \sim B(p_1)$, $X_2 \sim B(p_2)$, $\ldots$, $X_n \sim B(p_n)$, astfel încât $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Propoziţie 6.3.17. *În condiţiile definiţiei de mai sus, funcţia caracteristică a variabilei aleatoare X este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} (p_k e^{it} + q_k).$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din independenţa variabilelor aleatoare X_k, $k = \overline{1,n}$, şi propoziţia 6.3.6 □

Observaţie 6.3.18. Derivatele funcţiei caracteristice asociate unei variabile aleatoare cu repartiţie binomială generalizată fiind

$$\varphi'(t) = i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k e^{it}}{p_k e^{it} + q_k} \prod_{j=1}^{n} (p_j e^{it} + q_j),$$

$$\varphi''(t) = i^2 \cdot \prod_{j=1}^{n} (p_j e^{it} + q_j) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k e^{it}}{p_k e^{it} + q_k} + \sum_{k \neq l} \frac{p_k p_l e^{2it}}{(p_k e^{it} + q_k)(p_l e^{it} + q_l)} \right),$$

$$\varphi'''(t) = i^3 \cdot \prod_{j=1}^{n} (p_j e^{it} + q_j) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k e^{it}}{p_k e^{it} + q_k} + 3 \sum_{k \neq l} \frac{p_k p_l e^{2it}}{(p_k e^{it} + q_k)(p_l e^{it} + q_l)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k \neq l \neq m \neq k} \frac{p_k p_l p_m e^{3it}}{(p_k e^{it} + q_k)(p_l e^{it} + q_l)(p_m e^{it} + q_m)} \right), \ldots$$

obţinem momentele repartiţiei binomiale generalizate:

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} p_k \, ,$$
$$M_2 = \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k\neq l} p_k p_l \, ,$$
$$M_3 = \sum_{k=1}^{n} p_k + 3\sum_{k\neq l} p_k p_l + \sum_{k\neq l\neq m\neq k} p_k p_l p_m \quad , \ldots$$

În particular media şi dispersia unei variabile aleatoare X cu repartiţie binomială generalizată sunt:

$$M(X) = M_1 = \sum_{k=1}^{n} p_k \, ,$$

respectiv

$$D^2(X) = M_2 - M_1^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} p_k^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \, .$$

6.3.4 Repartiţia hipergeometrică

Definiţie 6.3.19. Spunem că o variabilă aleatoare X are **o repartiţie hipergeometrică de parametri** n**,** M**,** N, unde $n, M, N \in \mathbb{N}$ cu $n, M \leq N$ dacă

$$P(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \, ,$$

pentru orice $k \in \mathbf{N}$, cu $max(0, n + M - N) \leq k \leq min(n, M)$.

Notaţie 6.3.20. $X \sim Hyp(n, M, N)$.

Observaţie 6.3.21. Notând $p := \frac{M}{N}$, mai scriem uneori $X \sim Hyp(n, p, N)$.

Observaţie 6.3.22. Repartiţia hipergeometrică corespunde schemei clasice a bilei revenite.

Propoziţie 6.3.23. *Dacă* $X \sim Hyp(n, M, N)$*, atunci cu notaţiile* $p = \frac{M}{N}$ *şi* $q = 1 - p = \frac{N-M}{N}$ *au loc:*

$$M(X) = n \cdot p\,,$$

respectiv

$$D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p \cdot q\,.$$

Demonstraţie. Pentru $X \sim Hyp(n, M, N)$ avem, cu notaţia $p := \frac{M}{N}$, media

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{M}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} C_{M-1}^{k-1} \cdot C_{N_M}^{n-k} = \frac{M \cdot C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = n \cdot p\,.$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \textstyle\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{M}{C_N^n} \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot C_{M-1}^{k-1} \cdot C_{N-M}^{n-k} = \\ &= \textstyle\frac{M}{C_N^n} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{M-1}^{k-1} \cdot C_{N-M}^{n-k} + \frac{M(M-1)}{C_N^n} \sum\limits_{k=2}^{n} C_{M-2}^{k-2} \cdot C_{N-M}^{n-k} = \\ &= \textstyle np + \frac{M(M-1) \cdot C_{N-2}^{n-2}}{C_N^n} = np + \frac{M(M-1) \cdot n(n-1)}{N(N-1)} = np + np \cdot \frac{(n-1)(Np-1)}{N-1}\,, \end{aligned}$$

astfel că

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \textstyle np + np \cdot \frac{(n-1)(Np-1)}{N-1} - n^2p^2 = \\ &= \textstyle np \cdot \left(1 - np + \frac{(n-1)(Np-1)}{N-1}\right) = np \cdot \frac{q(N-n)}{N-1}\,. \end{aligned}$$

□

6.3.5 Repartiţia geometrică

Definiţie 6.3.24. Spunem că o variabilă aleatoare X are **o repartiţie geometrică de parametru** p, unde $0 \le p \le 1$, dacă X ia valorile $1, 2, \ldots, k, \ldots$ cu probabilităţile

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \quad , (\forall) k \in \mathbb{N}^*\,,$$

unde $q = 1 - p$.

Notaţie 6.3.25. $X \sim Geom(p)$.

Observaţie 6.3.26. Tabloul de repartiţie al unei variabile aleatoare X, cu $X \sim Geom(p)$ are forma

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ p & p \cdot q & \ldots & p \cdot q^{k-1} & \ldots \end{pmatrix} .$$

Denumirea de repartiţie geometrică provine de la faptul că probabilităţile din linia a doua a tabloului de mai sus formează o progresie geometrică.

Observaţie 6.3.27. Probabilităţile de mai sus reprezintă şansa ca un eveniment A cu probabilitate p să se producă după exact k experimente independente.

Propoziţie 6.3.28. *Dacă* $X \sim Geom(p)$, *atunci*

$$M(X) = \frac{1}{p} \quad , \quad D^2(X) = \frac{q}{p^2} .$$

Demonstraţie. Avem

$$M(X) = \sum_{k \in \mathbf{N}} k \cdot p \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} p \cdot q^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p \cdot q^{k-1}}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} .$$

Rezultatul de mai sus se putea obţine şi derivând în raport cu q în identitatea

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots = \frac{1}{1-q} ,$$

astfel că

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2} .$$

Pentru calculul dispersiei avem că

$$M(X^2) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k^2 \cdot p \cdot q^{k-1} = \sum_{k\in\mathbf{N}} k(k-1)\cdot p \cdot q^{k-1} + \sum_{k\in\mathbf{N}} k \cdot p \cdot q^{k-1} =$$

$$= pq \cdot \sum_{k\in\mathbf{N}} k(k-1)\cdot q^{k-2} + p \cdot \sum_{k\in\mathbf{N}} k \cdot q^{k-1} = pq \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)'' +$$

$$+p\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{p}{(1-q)^2} = 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{q+1}{p^2}\,.$$

Obţinem că

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}\,.$$

□

Propoziţie 6.3.29. *Funcţia caracteristică asociată unei variabile aleatoare $X \sim Geom(p)$ este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\,.$$

Demonstraţie. Avem că

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}e^{i}tk = pe^{it}\sum_{k=1}^{\infty}(qe^{it})^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\,.$$

□

6.3.6 Repartiţia binomială cu exponent negativ

Această repartiţie generalizează repartiţia geometrică, introdusă mai sus.

Definiţie 6.3.30. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X are **o repartiţie binomială cu exponent negativ de parametri** n

şi p, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $0 < p < 1$, dacă X ia valorile n, $n+1$, $\ldots$, cu probabilităţile

$$P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^k q^{k-n} \quad , (\forall) k \geq n \, ,$$

unde $q = 1 - p$.

Notaţie 6.3.31. Notăm $X \sim NBin(n, p)$ dacă variabila aleatoare discretă X are repartiţie binomială cu exponent negativ de parametri n şi p.

Observaţie 6.3.32. Probabilităţile de mai sus corespund şansei ca un eveniment A cu probabilitatea p să se producă de n ori după exact k experimente independente.

Observaţie 6.3.33. Din definiţia unei variabile aleatoare cu repartiţie binomială cu exponent negativ rezultă imediat că $X \sim NBin(n, p)$ are loc dacă şi numai dacă există n variabile aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Geom(p)$, astfel încât $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Propoziţie 6.3.34. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare* $X \sim NBin(n, p)$ *este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \, , \quad \varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \right)^n \, .$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din observaţia 6.3.33 şi propoziţia 6.3.29 □

De aseemenea, din observaţia 6.3.33 şi propoziţia 6.3.28 rezultă următoarea

Propoziţie 6.3.35. *Media şi dispersia unei variabile aleatoare* $X \sim NBin(n, p)$ *sunt date de*

$$M(X) = \frac{n}{p} \, , \quad D^2(X) = \frac{nq}{p^2} \, .$$

6.3.7 Repartiţia Poisson

Definiţie 6.3.36. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X are o **repartiţie Poisson de parametru** μ dacă ia valorile $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ cu probabilităţile

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \quad , (\forall) k \in \mathbb{N}\,.$$

Notaţie 6.3.37. $X \sim Poi(\mu)$.

Propoziţie 6.3.38. *Dacă $X \sim Poi(\mu)$, atunci*

$$M(X) = \mu \quad \text{şi} \quad D^2(X) = \mu\,.$$

Demonstraţie. Avem

$$M(X) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} = \sum_{k\geq 1}\frac{e^{-\mu}\mu^k}{(k-1)!} = e^{-\mu}\mu\sum_{k\geq 1}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\mu}\mu{\cdot}e^{\mu} = \mu\,.$$

De asemenea,

$$M(X^2) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k^2\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} k\frac{e^{-\mu}\mu^k}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k\geq 1}\frac{e^{-\mu}\mu^k}{(k-1)!} + \sum_{k\geq 1}(k-1)\frac{e^{-\mu}\mu^k}{(k-1)!} == \mu + \sum_{k\geq 2}\frac{e^{-\mu}\mu^k}{(k-2)!} =$$

$$= \mu + e^{-\mu}\mu^2\sum_{k\geq 2}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} = \mu + e^{-\mu}\mu^2\cdot e^{\mu} = \mu + \mu^2\,,$$

astfel că

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu\,.$$

□

Propoziţie 6.3.39. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare $X \sim Poi(\mu)$ este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = e^{\mu(e^{it}-1)}\,.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kit} \cdot \frac{e^{-\mu}\cdot\mu^k}{k!} =$$
$$= e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{it})^k}{k!} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu e^{it}} = e^{\mu(e^{it}-1)}\,.$$

□

6.3.8 Repartiţia uniformă discretă

Definiţie 6.3.40. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X are o **repartiţie uniformă discretă de parametru** n, dacă X ia valorile 1, 2, ..., n cu probabilităţile

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad , \ (\forall) k = \overline{1, n}\,,$$

Notaţie 6.3.41. $X \sim DUnif(n)$.

Propoziţie 6.3.42. *Dacă $X \sim DUnif(n)$, atunci*

$$M(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{şi} \quad D^2(X) = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

Demonstraţie. Media variabilei X este

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}\,.$$

Pentru calculul dispersiei, avem

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

şi

$$D^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) =$$
$$= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{6} = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

□

6.4 Repartiţii continue

6.4.1 Repartiţia uniformă continuă

Definiţie 6.4.1. Spunem că o variabilă aleatoare X urmează o **repartiţie uniformă** pe intervalul $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \chi_{[a,b]}(x).$$

Observaţie 6.4.2. Funcţia $\chi_{[a,b]} : \mathbf{R} \longrightarrow \{0,1\}$, **funcţia caracteristică** a intervalului $[a,b]$, fiind definită prin

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x \in [a,b]\,, \\ 0 & , \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus [a,b]\,, \end{cases}$$

rezultă că funcţia de densitate este dată de

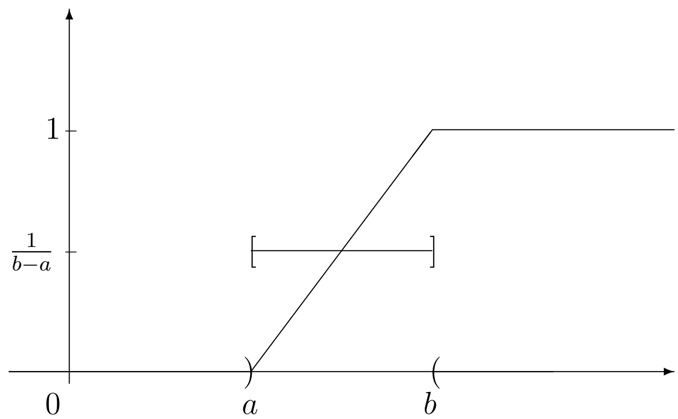
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ dacă } x \in [a,b], \\ 0 & , \text{ dacă } x > b. \end{cases}$$

Determinăm funcţia de repartiţie F_X asociată unei variabile aleatoare X cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a,b]$:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \cdot \chi_{[a,b]}(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt & , \text{ dacă } x < a, \\ \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt & , \text{ dacă } x \in [a,b], \\ \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt & , \text{ dacă } x > b. \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ dacă } x \in [a,b], \\ 1 & , \text{ dacă } x > b. \end{cases}$$

Graficele funcţiilor de densitate de repartiţie f, respectiv de repartiţie F_X, asociate variabilei aleatoare X cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a,b]$ sunt



Funcţiile de repartiţie şi de densitate de repartiţie ale unei variabile uniforme continue

Calculăm acum media $M(X)$ şi dispersia $D^2(X)$ corespunzătoare variabilei X cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a, b]$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$$

Pentru calculul dispersiei folosim relaţia

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Avem

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (b^3 - a^3) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Prin urmare,

$$D^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{12} - \frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Abaterea medie pătratică este atunci

$$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\,.$$

Principalele caracteristici numerice ale unei variabile X cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a, b]$ sunt deci

$$\boxed{M(X) = \tfrac{a+b}{2} \qquad D^2(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma(X) = \tfrac{b-a}{2\sqrt{3}}}$$

Propoziţie 6.4.3. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare X cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a, b]$ este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & ,\ \textit{dacă } t = 0\,, \\ \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t} & ,\ \textit{dacă } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din definiţia funcţiei caracteristice,

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}\, dx\,.$$

Evident, $\varphi(0) = 1$, iar pentru $t \neq 0$ avem că

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx}\, dx = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}\,.$$

□

Observaţie 6.4.4. Funcţia φ de mai sus este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are derivatele date de

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(b^n - a^n)}{n \cdot (n-k-1)!(b-a)} \cdot t^{n-k-1}\,, \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*\,.$$

Obţinem atunci imediat că momentele variabilei aleatoare X sunt

$$M_k(X) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}\,.$$

6.4.2 Repartiţia normală

Definiţie. Media. Dispersia. Momente

Definiţie 6.4.5. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie normală** sau **gaussiană** dacă are asociată **funcţia de densitate de repartiţie** $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$\boxed{f(x) \overset{not}{=} f(x; m, \sigma) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.}$$

Observaţie 6.4.6. Pentru o variabilă aleatoare continuă X cu funcţia de repartiţie dată de relaţia de mai sus spunem că este o variabilă aleatoare normală de parametri m şi σ.

Notaţie 6.4.7. Notăm în acest caz $X \in N(m, \sigma)$.

Propoziţie 6.4.8. Funcţia de repartiţie *asociată este atunci dată de*

$$F_X(x) \overset{not}{=} F_X(x; m, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(t; m, \sigma)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Observaţie 6.4.9. Funcţia $f(\cdot; m, \sigma)$ îndeplineşte condiţiile din definiţia unei densităţi de repartiţie:
1) $f(x; m, \sigma) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.
2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x; m, \sigma)\, dx = 1$.

Demonstraţie. Proprietatea 1) este evidentă. Pentru 2) avem

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x; m, \sigma)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\, dx \overset{not}{=} I$$

Pentru calculul integralei I facem schimbarea de variabilă

$$z = \frac{x-m}{\sigma}$$

Avem atunci

$$x - m = z \cdot \sigma \Longleftrightarrow x = z \cdot \sigma + m \qquad \text{şi} \qquad dx = \sigma \cdot dz\,,$$

astfel că

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{\sigma} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \cancel{\sigma} \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

$\square$

Observaţie 6.4.10. În calculul de mai sus am folosit valoarea integralei improprii a lui Poisson

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi}}$$

Teoremă 6.4.11. *Dacă* $X \in N(m, \sigma)$, *atunci*
1) $M(X) = m$.
2) $D^2(X) = \sigma^2$.

Demonstraţie. 1)

$$M(X) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x;m,\sigma)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

Efectuând aceeaşi schimbare de variabilă ca mai sus, putem scrie în continuare

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot z + m}{\cancel{\sigma} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \cancel{\sigma} \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma \cdot z + m) \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} m \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \right)$$

Dacă notăm cu I_1, respectiv I_2, cele două integrale dintre paranteze, atunci

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)'\,dz = -e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= -\left(\lim_{z\to\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} - \lim_{z\to-\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\right) = 0 - 0 = 0,$$

iar I_2 este integrala lui Poisson pe care am menţionat-o mai sus, cu valoarea

$$I_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Rezultă că

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (\sigma \cdot 0 + m \cdot \sqrt{2\pi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot m \cdot \sqrt{2\pi} = m$$

2)
$$D^2(X) \overset{def}{=} M[(X - M(X))^2] = M[(X - m)^2] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x; m, \sigma)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - m}{\sigma}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

Efectuând aceeaşi schimbare de variabilă,
$$z = \frac{x - m}{\sigma}\,,$$
putem scrie
$$D^2(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma\, dz =$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot \left(z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\, dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)'\, dz =$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[z \cdot \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} z' \cdot \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\, dz \right] =$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(0 + \sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2\,.$$

Am folosit mai sus faptul că
$$z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{z\to\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} - \lim_{z\to-\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = 0 - 0 = 0\,.$$

Cu acestea, teorema este demonstrată. □

Propoziţie 6.4.12. *Dacă* $X \sim N(0,1)$, *atunci pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *avem* $M_{2n-1}(X) = 0$ *şi*

$$M_{2n}(X) = (2n-1)!!\,.$$

Demonstraţie. Deoarece funcţia $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^{2n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ este impară, rezultă că

$$M_{2n-1}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = 0\,.$$

De asemenea, $M_2(X) = D^2(X) = 1$, iar pentru $n \geq 2$ avem

$$M_{2n}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = (2n-1)M_{2n-2}(X)\,.$$

Din relaţia de recurenţă de mai sus rezultă prin inducţie după n că $M_{2n}(X) = (2n-1)!!$. $\square$

Propoziţie 6.4.13. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare* $X \sim N(0,1)$ *este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Demonstraţie. Avem

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n t^n x^n}{n!}e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n t^n}{n!}M_n(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}(2n-1)!! = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

$\square$

Propoziţie 6.4.14. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare* $X \sim N(m,\sigma)$ *este dată de*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi_X(t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,.$$

Demonstraţie. Cum $X \sim N(m, \sigma)$ dacă şi numai dacă $Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$, obţinem că

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = M(e^{it(\sigma Z+m)}) = e^{imt}M(e^{it\sigma Z}) = e^{imt}\varphi_Z(\sigma t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

□

Teoremă 6.4.15. *Dacă $X \sim N(m_1, \sigma_1)$ şi $Y \sim N(m_2, \sigma_2)$ sunt două variabile aleatoare independente, atunci $X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.*

Demonstraţie. Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $X+Y$ este dată de

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{im_1t-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{im_2t-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

unde $m = m_1 + m_2$, iar $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Din teorema de unictate rezultă acum afirmaţia teoremei. □

Studiul funcţiei $f(x; m, \sigma)$ - "Clopotul lui Gauss"

Considerăm funcţia de densitate de repartiţie

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow [0, +\infty), \qquad f(x; m, \sigma) = .\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

a) Calculăm limitele la $-\infty$ şi $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x; m, \sigma) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\infty} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0,$$

respectiv

$$\lim_{x\to\infty} f(x; m, \sigma) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\infty} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0\,.$$

Din cele de mai sus rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru funcţia f atât la $-\infty$, cât şi la $+\infty$.

b) În continuare calculăm derivatele f' şi f'' ale funcţiei f:

$$f'(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2} \cdot \cancel{2}(x-m)\right) =$$

$$= -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Punctele critice ale funcţiei f sunt date de

$$f'(x;m,\sigma) = 0 \Longleftrightarrow x - m = 0 \Longleftrightarrow x = m\,.$$

Valoarea funcţiei f în punctul critic $x = m$ este

$$f(m;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(m-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,.$$

Pentru derivata de ordinul doi, avem

$$f''(x;m,\sigma) = \left(-\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \left((x-m) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} + (x-m) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2} \cdot (x-m)\right)\right] =$$

$$= -\frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)\,.$$

Pentru a determina punctele de inflexiune, rezolvăm ecuaţia $f'' = 0$:

$$f''(x;m,\sigma) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\iff (x-m)^2 = \sigma^2 \iff x - m = \pm\sigma \iff x = m \pm \sigma\,.$$

Valorile funcţiei f în aceste două puncte sunt

$$f(m-\sigma; m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(m-\sigma-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\,,$$

respectiv

$$f(m+\sigma; m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(m+\sigma-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\,.$$

Putem acum forma tabloul de variaţie al funcţiei f:

x	$-\infty$		$m-\sigma$		m		$m+\sigma$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	$\searrow$	0
f'	+	+	+	+	0	−	−	−	−
f''	+	+	0	−	−	−	0	+	+

Pe baza datelor din tabloul de variaţie putem trasa acum reprezentarea graficului funcţiei f(graficul de mai jos este realizat pentru $m = 4$ şi $\sigma = 3$)

Observaţie 6.4.16. a) Pentru diferite valori ale parametrilor (m, σ) obţinem curbe diferite ale densităţilor de repartiţie.
b) Graficul are un unic punct de maxim, $\left(m, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, şi două puncte de inflexiune, $\left(m-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ şi $\left(m+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, aflate la o distanţă(pe orizontală) de 2σ.
c) Cu cât abaterea σ este mai mică, cu atât mai "ascuţit" este "clopotul".
d) Graficul este simetric faţă de dreapta $x = m$.

Funcţia de repartiţie F_X a unei variabile normale

Prin definiţie, funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue care admite densitate de repartiţie este dată prin

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Astfel, în cazul unei variabile aleatoare $X \in N(m,\sigma)$ avem

$$F_X(x;m,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(t;m,\sigma)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

Studiem acum variaţia funcţiei $F_X(\cdot;m,\sigma)$.
Din proprietăţile funcţiilor de repartiţie ştim că

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x;m,\sigma) = 0 \qquad \text{şi} \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x;m,\sigma) = 1\,.$$

Rezultă că dreapta $y = 0$ este asimptotă pentru funcţia F_X către $-\infty$, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă pentru funcţia F_X către ∞.

Deoarece

$$F_X(x;m,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(t;m,\sigma)\,dt\,,$$

derivatele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei F_X sunt:

$$F_X'(x;m,\sigma) = f(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

respectiv

$$F_X''(x;m,\sigma) = f'(x;m,\sigma) = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Deoarece $F_X'(x;m,\sigma) > 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, rezultă că F_X este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

De asemenea, cum $F''_X(x;m,\sigma) > 0$, $(\forall)x < m$, iar $F''_X(x;m,\sigma) < 0$, $(\forall)x > m$, rezultă că F_X este convexă pe intervalul $(-\infty, m)$ şi concavă pe intervalul (m,∞), având un punct de inflexiune pentru $x = m$. Valoarea funcţiei F_X în punctul de inflexiune este

$$F_X(m;m,\sigma) = \int_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Calculăm această integrală, efectuând schimbarea de variabilă

$$x \longmapsto y = m + (m - x) = 2m - x\,,$$

care asociază fiecărui punct $x \in \mathbf{R}$ simetricul său faţă de punctul m. Avem atunci

$$x = 2m - y\ ,\quad dx = -dy\ ,\quad -\infty \longmapsto +\infty\ ,\quad \text{şi } m \longmapsto m\,,$$

astfel că

$$F_X(m;m,\sigma) = \int_{m}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(2m-y-m)^2}{2\sigma^2}}\, dy = \int_{m}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(m-y)^2}{2\sigma^2}}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\, dy = \int_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\, dy = 1 - F_X(m;m,\sigma)\,.$$

Rezultă că $2F_X(m;m,\sigma) = 1$, deci valoarea funcţiei de repartiţie în punctul ei de inflexiune $x = m$ este

$$F_X(m;m,\sigma) = \frac{1}{2}\,.$$

Putem acum pune în evidenţă tabloul de variaţie al funcţiei de repartiţie:

x	$-\infty$				m				∞
F_X	0	$\nearrow$	$\smile$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frown$	$\nearrow$	1
F'_X	+	+	+	+	+	+	+	+	+
F''_X	+	+	+	+	0	−	−	−	−

Reprezentarea graficului funcţiei de repartiţie $F_X(\cdot; m, \sigma^2)$ este atunci

Definiţie 6.4.17. Dacă $X \in N(0,1)$, adică X este o variabilă aleatoare care are o **repartiţie normală standard**, cu densitatea de repartiţie

$$f(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \, x \in \mathbf{R} \, ,$$

atunci funcţia sa de repartiţie

$$\Phi(x) \overset{not}{:=} F_X(x;0,1) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \, ,$$

se numeşte **funcţia lui Laplace**.

Variabile aleatoare normale standardizate. Funcţia lui Laplace

Propoziţie 6.4.18. *Dacă* $X \in N(m,\sigma)$, *atunci* $Z = \frac{X-m}{\sigma} \in N(0,1)$.

Demonstraţie. Variabila aleatoare Z este standardizata variabilei X şi are prin urmare media 0 şi dispersia 1. Rămâne să arătăm că Z are o densitate de repartiţie corespunzătoare unei variabile normale. Cu definiţia funcţiei de repartiţie avem

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < z\right) = P(X < z \cdot \sigma + m) =$$

$$= F_X(z \cdot \sigma + m; m, \sigma) = \int\limits_{-\infty}^{z\cdot\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt \, .$$

Pentru a calcula această integrală, facem schimbarea de variabilă

$$t \longmapsto u = \frac{t-m}{\sigma} \, ,$$

pentru care

$t = u \cdot \sigma + m$, $\quad dt = \sigma \cdot du$, $\quad -\infty \longmapsto -\infty$, $\quad$ şi $z \cdot \sigma + m \longmapsto z$,

astfel încât

$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{z\cdot\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma\,du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int\limits_{-\infty}^{z} f(u;0,1)\,du = \Phi(z)\,,$$

unde Φ este funcţia lui Laplace. Deducem că Z este o variabilă aleatoare normală, mai mult chiar, deoarece are densitatea de repartiţie $f(\cdot;0,1)$, rezultă că $Z \in N(0,1)$. $\square$

Propoziţie 6.4.19. *Funcţia lui Laplace, adică funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare normale standardizate, are proprietatea*

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad , (\forall) z \in \mathbf{R}\,.$$

Observaţie 6.4.20. Relaţia de mai sus se poate scrie echivalent

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1 \quad , (\forall) z \in \mathbf{R}\,.$$

Demonstraţie.

$$\Phi(-z) = \int\limits_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \int\limits_{-z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du =$$

$$= 1 - \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = 1 - \Phi(z)\,.$$

(Am efectuat schimbarea de variabilă $u \longmapsto v = -u$ pentru calculul celei de-a doua integrale.) $\square$

Observaţie 6.4.21. Fie $X \in N(m,\sigma)$ o variabilă aleatoare normală şi $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Atunci

$$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x;\, m,\sigma)\,dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Pentru calculul acestei integrale efectuăm schimbarea de variabilă

$$x \longmapsto z = \frac{x-m}{\sigma}\,,$$

pentru care

$$x = z \cdot \sigma + m\,, \quad dx = \sigma \cdot dz\,, \quad a \longmapsto \frac{a-m}{\sigma}\,, \quad b \longmapsto \frac{b-m}{\sigma}\,.$$

Obţinem

$$P(a < X < b) = \int\limits_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \int\limits_{-\infty}^{\frac{a-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\,.$$

Am obţinut astfel formula de calculul a probabilităţii ca variabila normală $X \in N(m, \sigma^2)$ să ia valori în intervalul (a, b):

$$\boxed{P(a < X < b) = \Phi\left(\tfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-m}{\sigma}\right)}$$

Aceată probabilitate este deci calculată cu ajutorul funcţiei lui Laplace de repartiţie a unei variabile aleatoare normale standard.

Valorile acestei funcţii sunt înregistrate în tabele care se utilizează astfel pentru determinarea probabilităţilor evenimentelor legate de o variabilă aleatoare normale.

Observaţie 6.4.22. Fie $\alpha > 0$. Atunci

$$P(|X-m| < \alpha) = P(m - \alpha < X < m + \alpha) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m+\alpha-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\alpha-m}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\alpha}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\right] = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1 \,.$$

Deci

$$P(|X - m| < \alpha) = P(m - \alpha < X < m + \alpha) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1 \,.$$

În particular, pentru $\alpha = 3\sigma$ obţinem

$$P(|X - m| < 3\sigma = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(3) - 1 \,.$$

Din tabelele de valori ale funcţiei lui Laplace avem că $\Phi(3) = 0,9987$, astfel că

$$P(|X - m| < 3\sigma = 2 \cdot 0,9987 - 1 = 0,9974 \,.$$

Probabilitatea ca o variabilă aleatoare normală $X \in N(m, \sigma)$ să se abată de la medie cu mai mult de 3σ este deci foarte mică, anume $1 - 0,9974 = 0,0026$.

6.4.3 Repartiţia log-normală

Definiţie 6.4.23. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie log-normală de parametri** μ **şi** σ dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0\,; \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & , \text{ dacă } x > 0\,. \end{cases}$$

Notaţie 6.4.24. $X \sim LOGN(\mu, \sigma)$.

Propoziţie 6.4.25. *Dacă* $X \sim LOGN(\mu, \sigma)$, *atunci*

$$M(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad , \quad D^2(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} \,.$$

6.4.4 Repartiţia Gamma

Definiţie 6.4.26. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie Gamma de parametri** α **şi** β, unde $\alpha, \beta > 0$, dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0\,; \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1} & , \text{ dacă } x > 0\,, \end{cases}$$

unde Γ este funcţia Gamma a lui Euler, definită prin

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\alpha e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx\,.$$

Observaţie 6.4.27. Pentru funcţia Gamma au loc proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) & , (\forall)\alpha > 1\,; \\ \Gamma(n) = (n-1)! & , (\forall) n \in \mathbf{N}*\,; \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,. & \end{array}$$

Notaţie 6.4.28. $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$. În particular, $\gamma(\alpha, 1) \stackrel{not}{=} \gamma(\alpha)$.

Propoziţie 6.4.29. *Dacă* $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$, *atunci*

$$M(X) = \alpha \cdot \beta \quad , \quad D^2(X) = \alpha \cdot \beta^2\,.$$

Propoziţie 6.4.30. *Dacă* $X \sim \gamma(\alpha)$, *atunci*

$$M_n(X) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,.$$

Propoziţie 6.4.31. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare* $X \sim \gamma(\alpha)$ *este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = (1-it)^{-\alpha}\,.$$

Teoremă 6.4.32. *Dacă* $X \sim \gamma(\alpha_1)$ *şi* $Y \sim \gamma(\alpha_2)$ *sunt două variabile aleatoare independente, atunci* $X + Y \sim \gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Teoremă 6.4.33. *Dacă* $X \sim N(m, \sigma)$, *atunci* $Y = \frac{(X-m)^2}{2\sigma^2} \sim \gamma(\frac{1}{2})$.

6.4.5 Repartiţia Beta

Definiţie 6.4.34. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie Beta de parametri** α **şi** β, unde $\alpha, \beta > 0$, dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0 \text{ sau } x \geq 0\,; \\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \text{ dacă } 0 < x < 1\,, \end{cases}$$

unde B este funcţia Beta a lui Euler, definită prin

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,.$$

Observaţie 6.4.35.

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,,\ (\forall)\alpha,\beta > 0\,.$$

Notaţie 6.4.36. $X \sim BETA(\alpha,\beta)$.

Propoziţie 6.4.37. *Dacă* $X \sim BETA(\alpha,\beta)$*, atunci*

$$M(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad , \quad D^2(X) = \frac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\,.$$

Propoziţie 6.4.38. *Momentele unei variabile aleatoare* $X \sim BETA(\alpha,\beta)$ *sunt date de*

$$M_n(X) = \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)}\,.$$

Teoremă 6.4.39. *Dacă* $X \sim \gamma(\alpha)$ *şi* $Y \sim \gamma(\beta)$ *sunt variabile aleatoare independente, atunci* $\frac{X}{X+Y} \sim BETA(\alpha,\beta)$.

Teoremă 6.4.40. *Dacă* $X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n \sim N(0,\sigma)$ *sunt variabile aleatoare independente, atunci*

$$\frac{X_1^2+\ldots+X_m^2}{X_1^2+\ldots+X_m^2+Y_1^2+\ldots+Y_n^2} \sim BETA\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)\,.$$

6.4.6 Repartiţia exponenţială

Definiţie 6.4.41. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie exponenţială de parametru** a, unde $a > 0$, dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x;a) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0\,; \\ ae^{-ax} & , \text{ dacă } x > 0\,, \end{cases}$$

Notaţie 6.4.42. $X \sim EXP(a)$.

Observaţie 6.4.43. $X \sim EXP(a) \Longleftrightarrow X \sim \gamma(1, \frac{1}{a})$.

Propoziţie 6.4.44. *Dacă* $X \sim EXP(a)$*, atunci*

$$M(X) = \frac{1}{a} \quad , \quad D^2(X) = \frac{1}{a^2}\,.$$

Figure 6.1: Reprezentarea grafică a unei variabile $X \sim EXP(3)$

6.4.7 Repartiţia χ^2(Helmert-Pearson)

Definiţie 6.4.45. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie** χ^2 **cu** ν **grade de libertate şi parametru** σ dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \le 0\,; \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\sigma^\nu \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} & , \text{ dacă } x > 0\,, \end{cases}$$

Notaţie 6.4.46. $X \sim \chi^2(\nu, \sigma)$. În particular, $\chi^2(\nu, 1) \overset{not}{=} \chi^2(\nu)$.

Observaţie 6.4.47. 1) $X \sim \chi^2(\nu) \iff X \sim \gamma\left(\frac{\nu}{2}, 2\right)$.
2) $X \sim \chi^2(2\nu, \frac{1}{\sqrt{2}}) \iff X \sim \gamma(\nu)$.

Propoziţie 6.4.48. *Momentele unei variabile aleatoare* $X \sim \chi^2(\nu, \sigma)$ *sunt date de*

$$M_n(X) = \nu(\nu+2)\dots(\nu+2n-2)\sigma^{2n}\,.$$

Propoziţie 6.4.49. *Dacă* $X \sim \chi^2(\nu)$*, atunci*

$$M(X) = \nu \quad , \quad D^2(X) = 2\nu\,.$$

Propoziţie 6.4.50. *Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare* $X \sim \chi^2(\nu, \sigma)$ *este dată de*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi(t) = (1 - 2i\sigma^2 t)^{-\frac{\nu}{2}}\,.$$

Propoziţie 6.4.51. *Dacă* $X \sim \chi^2(\nu_1, \sigma)$ *şi* $Y \sim \chi^2(\nu_2, \sigma)$ *sunt variabile aleatoare independente, atunci* $X + Y \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2, \sigma)$.

Propoziţie 6.4.52. *Dacă* $X_1, X_2, \dots, X_\nu \sim N(0, \sigma)$ *sunt variabile aleatoare independente, atunci* $\sum\limits_{i=1}^{\nu} X_i^2 \sim \chi^2(\nu)$.

Figure 6.2: Reprezentarea grafică a unor variabile $\chi^2(2)$, $\chi^2(3)$, $\chi^2(4)$, $\chi^2(6)$, $\chi^2(8)$

6.4.8 Repartiţia Weibull

Definiţie 6.4.53. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie Weibull de parametri** α **şi** β, unde $\alpha, \beta > 0$ dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0\,; \\ \frac{\beta}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x^{\beta-1} & , \text{ dacă } x > 0\,, \end{cases}$$

În cazul particular $\beta = 2$, repartiţia aceasta se mai numeşte şi repartiţie Rayleigh.

Notaţie 6.4.54. $X \sim WEI(\alpha, \beta)$.

Propoziţie 6.4.55. *Dacă* $X \sim WEI(\alpha, \beta)$*, atunci*

$$M(X) = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \quad , \quad D^2(X) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right].$$

6.4.9 Repartiţia Student

Definiţie 6.4.56. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie Student cu** n **grade de libertate** dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad , (\forall)x \in \mathbf{R}\,.$$

Notaţie 6.4.57. $X \sim t(n)$.

Propoziţie 6.4.58. *Dacă* $X \sim t(n)$*, atunci*

$$M(X) = 0 \quad , \quad D^2(X) = \frac{n}{n-2}\,.$$

Propoziţie 6.4.59. *Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente, cu $X \sim N(0,1)$, respectiv $Y \sim \chi^2(n)$, atunci*

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)\,.$$

6.4.10 Repartiţia Snedecor-Fischer

Definiţie 6.4.60. Spunem că o variabilă aleatoare continuă X are o **repartiţie Snedecor-Fischer cu** m **şi** n **grade de libertate** dacă are funcţia de densitate de repartiţie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{dacă } x \le 0\,; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}} & ,\ \text{dacă } x > 0\,, \end{cases}$$

Notaţie 6.4.61. $X \sim F(m,n)$.

Propoziţie 6.4.62. *Dacă $X \sim F(m,n)$, atunci*

$$M(X) = \frac{n}{n-2} \quad , \quad D^2(X) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-4)(n-2)^2}$$

Propoziţie 6.4.63. *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente, cu $X \sim \chi^2(m)$, respectiv $Y \sim \chi^2(n)$, atunci*

$$\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F(m,n)\,.$$

6.5 Probleme propuse

Problema 6.1. Cum se explică ”norocosul” 7(vezi introducerea)?

Problema 6.2. Dintr-o urnă în care se găsesc a bile albe şi b bile negre se extrage o bilă la întâmplare. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă? Dar neagră?

Problema 6.3. Se aruncă două zaruri de n ori. Care este probabilitatea P ca dubla $6-6$ să apară cel puţin o dată.

Problema 6.4. Să se compare probabilitatea de a obţine cel puţin un 6 atunci când se aruncă un zar de patru ori cu probabilitatea de a obţine cel puţin o dată dubla $6-6$ atunci când se aruncă două zaruri de 24 de ori.

Observaţie. Această problemă a constituit punctul de plecare al teoriei probabilităţilor. Cavalerul de Méré a observat empiric că are loc proprietatea $P(A) > \frac{1}{2} > P(B)$, şi , deoarece nu i se părea logică, i-a cerut o argumentare lui Blaise Pascal, cu care era contemporan.

Problema 6.5. Trei trăgători trag simultan asupra unei ţinte. Probabilităţile fiecăruia dintre ei de a nimeri ţinta sunt $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, respectiv $p_3 = 0,7$. Care este probabilitatea caţinta să fie nimerită exact o dată?

Problema 6.6. Ştiind că $P(A|B) = \frac{2}{5}$, $P(A|\overline{B}) = \frac{1}{10}$ şi $P(B|A) = \frac{3}{5}$, să se afle $P(A)$ şi $P(B)$.

Problema 6.7. În urma unei experienţe, un eveniment A poate apărea cu o probabilitate de $0,01$.
a) Care este probabilitatea ca efectuînd de 10 ori experienţa, evenimentul A să apară de 4 ori?
b) De câte ori ar trebui repetat experimentul pentru ca probabilitatea de apariţie cel puţin o dată a evenimentului A să fie cel puţin $0,5$.

Problema 6.8. Un jucător la loto 6/49 marchează pe formularul său de joc 12 numere. Care este probabilitatea ca (exact) 4 dintre aceste numere să fie extrase la jocul de duminică? Câte numere ar trebui să marcheze jucătorul pentru a avea cel puţin 50% şanse de a câştiga premiul cel mare.

Problema 6.9. Se consideră experimentul aleator de aruncare a unui zar. Dacă A reprezintă evenimentul de apariţie a uneia dintre feţele 1,2, iar B evenimentul de apariţie a uneia dintre feţele 3,4,5,6, ce fel de evenimente sunt A şi B?

Problema 6.10. Doi jucători joacă şah. Fie A evenimentul ca primul jucător să câştige, iar B evenimentul ca al doilea jucător să câştige. Partida s-a terminat remiză.
a) S-a realizat vreunul dintre evenimentele A şi B?
b) Să se scrie evenimentul realizat, cu ajutorul evenimentelor A şi B.

Problema 6.11. Să se arate că dacă evenimentele A şi C sunt incompatibile, atunci

$$A - (B - C) = A - B\,.$$

Problema 6.12. Să se scrie câmpul de evenimente ataşat experienţei aruncării unei monede.

Problema 6.13. Să se scrie câmpul de evenimente ataşat experienţei aruncării unui zar.

Problema 6.14. Să se arate că evenimentele A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ formează un sistem complet de evenimente.

Problema 6.15. O claviatură standard a unui pian este formată din 88 de clape. Determinaţi probabilitatea ca o pisică sărind la întâmplare pe patru clape(eventual cu repetiţie) ale unui pian să reproducă primele patru note din Simfonia a V-a a lui Beethoven.

Problema 6.16. Să se arate că dacă $P(B|\overline{A}) = P(B|A)$, atunci evenimentele A şi B sunt independente.

Problema 6.17. Să se clasifice, în ordinea crescătoare a probabilităţii de apariţie la împărţirea dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc bine amestecate, următoarele mâini de poker:

Mână	Descriere	Exemplu
Chintă regală (Royal flush)	5 cărţi în suită dintr-o aceeaşi culoare, comandate de A	10 $\spadesuit$ J $\spadesuit$ Q $\spadesuit$ K $\spadesuit$ A $\spadesuit$
Chintă-culoare (Straight flush)	5 cărţi în suită dintr-o aceeaşi culoare, dar suita necomandată de A	4 $\diamondsuit$ 5 $\diamondsuit$ 6 $\diamondsuit$ 7 $\diamondsuit$ 8 $\diamondsuit$
Careu (Four of a kind)	4 cărţi de acelaşi rang şi o carte oarecare	Q $\spadesuit$ Q $\heartsuit$ Q $\diamondsuit$ Q $\clubsuit$ 7 $\heartsuit$
Ful (Full house)	un triplet şi o pereche	4 $\spadesuit$ 4 $\heartsuit$ 4 $\clubsuit$ 10 $\diamondsuit$ 10 $\clubsuit$
Culoare (Flush)	5 cărţi dintr-o aceeaşi culoare, dar nu în suită	5 $\heartsuit$ 6 $\heartsuit$ 8 $\heartsuit$ J $\heartsuit$ A $\heartsuit$
Chintă (Straight)	5 cărţi în suită, dar nu toate dintr-o aceeaşi culoare	7 $\diamondsuit$ 8 $\spadesuit$ 9 $\diamondsuit$ 10 $\heartsuit$ J $\clubsuit$
Triplet (Three of a kind)	3 cărţi de acelaşi rang şi 2 cărţi fără potriviri	K $\spadesuit$ K $\diamondsuit$ K $\clubsuit$ 6 $\diamondsuit$ 9 $\heartsuit$
Două perechi (Two pair)	2 cărţi de un acelaşi rang şi 2 cărţi de un acelaşi alt rang şi o carte de un alt rang	A $\spadesuit$ A$\heartsuit$ 8 $\diamondsuit$ 8 $\clubsuit$ 2 $\diamondsuit$
O pereche (Two of a kind)	2 cărţi de un acelaşi rang şi alte 3 cărţi fără potriviri	7 $\spadesuit$ 7 $\clubsuit$ 2 $\diamondsuit$ 6 $\heartsuit$ 10 $\heartsuit$

Problema 6.18. Într-o urnă sunt 10 bile, dintre care 6 albe şi 4 negre. Se extrag de două ori câte o bilă din urnă, fără să se repună bila extrasă înapoi în urnă. Fie A evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie albă, iar B evenimentul ca prima bilă extrasă să

fie neagră. Să se arate că evenimentele A şi B nu sunt independente.

Problema 6.19. Într-o anumită poziţie a unei gene pot să apară două alele: C şi D. Să presupunem că genotipurile posibile au următoarele probabilităţi:
$P(CC) = 0,46\,, \quad P(CD) = 0,31\,, \quad P(DD) = 0,23\,.$
Care este probabilitatea ca genotipul să conţină
a) alela C;
b) alela D?

Problema 6.20. Se consideră un grup format din n persoane. Care este probabilitatea ca dintre acestea cel puţin două să aibă aceeaşi dată aniversară? Determinaţi valoarea minimă a lui n, pentru care această probabilitate este de cel puţin 0,5.

Problema 6.21. Două variabile aleatoare discrete independente X şi Y au repartiţiile

$$X\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad Y\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Determinaţi distribuţiile variabilelor $2X^2+1$, $X+Y$, $X\cdot Y$, Y^{-1}, $X\cdot Y^{-1}$.

Problema 6.22. O variabilă aleatoare discretă are repartiţia

$$X\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 8 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Să se afle F_X şi să se calculeze $P(-1 \le X \le 3,5)$, $P(X < 5|X > -1)$, $F(-5)$, $F(12,4)$.

Problema 6.23. Variabila aleatoare X urmează o lege normală $N(2,4)$. Să se calculeze:
a) $P(0 \le X \le 3)$;
b) $P(|X| \le 1)$;
c) $P(-1 \le X \le 1|0 \le X \le 3)$.

Problema 6.24. Fie X o variabilă aleatoare având funcţia de repartiţie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq -2 \\ 0,3 & , \text{ dacă } -2 < x \leq 3 \\ 0,7 & , \text{ dacă } 3 < x \leq 10 \\ 1 & , \text{ dacă } x > 10\,. \end{cases}$$

a) Să se reprezinte grafic funcţia F şi să se determine repartiţia variabilei aleatoare X.
b) Să se calculeze $P(-1,5 < X \leq 10)$, $P(-2 < X < 3)$, $P(X \geq 3)$.

Problema 6.25. Să presupunem că timpul de aşteptare (în minute) într-o staţie de metrou are funcţia de repartiţie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & , \text{ dacă } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{ dacă } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x}{4} & , \text{ dacă } 2 < x \leq 4 \\ 1 & , \text{ dacă } x > 4\,. \end{cases}$$

a) Să se reprezinte grafic funcţia de repartiţie.
b) Să se determine densitatea de repartiţie corespunzătoare şi să se reprezinte grafic.
c) Să se determine probabilitatea ca un călător să aştepte:
c_1) mai mult de 3 minute;
c_2) mai puţin de 3 minute;
c_3) între un minut şi 3 minute;
c_4) mai mult de 3 minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut;
c_5) mai puţin de 3 minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut;

Problema 6.26. Variabila aleatoare X are repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se afle α şi repartiţiile variabilelor aleatoare $4X + 3$, $|X|$, $X + 2X^2$, $X^3 - X$. Să se calculeze valorile medii şi dispersiile

variabilelor aleatoare obţinute.
b) Să se determine funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X, X^2, $X+2X^2$ şi să se reprezinte grafic.
c) Să se calculeze $P\left(X < \frac{1}{2} | \, X \geq -\frac{1}{2}\right)$ şi $P\left(X^2 < \frac{1}{5}\right)$.

Problema 6.27. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât funcţia $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} a & , \text{ dacă } x \leq 0 \\ b \cdot x^2 & , \text{ dacă } 0 < x \leq 1 \\ c & , \text{ dacă } x > 1\,, \end{cases}$$

să fie funcţie de repartiţie a unei variabile aleatoare X. Să se afle funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $2X+1$ şi X^2.

Problema 6.28. Variabila aleatoare X are repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $M(X)$, $M(X^2)$, $M(2X+1)$, $M[(X-0,3)^2]$.

Problema 6.29. Variabila aleatoare X are repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} 2025 & 2050 & 2075 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $D(X)$.

Problema 6.30. Fie X şi Y variabile aleatoare, pentru care $M(X) = -2$, $M(Y) = 4$, $D^2(X) = 4$, $D^2(Y) = 9$, $\rho(X,Y) = -0,5$. Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$.

Problema 6.31. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{4-x^2}} & , \text{ dacă } -2 < x < 2\,, \\ 0 & , \text{ în rest.} \end{cases}$$

a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât f să fie densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare X şi apoi să se determine funcţia de repartiţie corespunzătoare.
b) Să se calculeze $P(0 < X \leq 2)$.

Problema 6.32. Fie A şi B două evenimente pentru care $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ şi $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Se definesc variabilele aleatoare X şi Y astfel: $X = 1$ sau $X = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul A; $Y = 1$ sau $Y = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul B. Să se calculeze $\rho(X, Y)$.

Problema 6.33. Într-un lot de 1000 de piese se ştie că sunt 2% piese cu defecte. Se aleg la întâmplare 100 de piese pentru a fi controlate. Să se afle probabilitatea ca printre piesele controlate, cel puţin 3 să fie cu defecte.

Problema 6.34. S-a constatat că probabilitatea de vânzare a unui anumit produs este constantă, $p = 0,7$. În ipoteza că într-o zi se pun în vânzare la un magazin 100 de astfel de produse, să se calculeze:
a) media şi dispersia variabilei aleatoare X care reprezintă numărul mediu de produse vândute;
b) $P(60 < X < 80)$.

Problema 6.35. Într-o cutie cu 80 de pachete de cafea sunt 4 pachete care nu au gramajul corespunzător. Să se calculeze probabilitatea ca o persoană care cumpără 4 pachete să primească :
a) toate pachetele cu gramaj necorespunzător;
b) cel puţin 2 pachete cu gramaj necorespunzător.

Problema 6.36. Fie X o variabilă aleatoare care urmează o repartiţie uniformă în intervalul $[-1, 1]$. Să se determine densitatăţile de repartiţie ale variabilelor alatoare $Y = e^X$ şi $Z = 2X + 1$.

Problema 6.37. Să se arate că, dacă X_1 şi X_2 sunt variabile aleatoare independente, cu $X_1 \sim Bin(n_1, p)$ şi $X_2 \sim Bin(n_2, p)$, atunci $X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$

Problema 6.38. Dacă $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de numere reale din intervalul $[0, 1]$ cu proprietatea că

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n \cdot p_n = \mu\,,$$

arătaţi că, pentru $k \in \mathbf{N}$ fixat, are loc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} .$$

Problema 6.39. Arătaţi că dacă X_1 şi X_2 sunt variabile aleatoare independente cu $X_1 \sim Poi(\mu_1)$ şi $X_2 \sim Poi(\mu_2)$, atunci $X_1 + X_2 \sim Poi(\mu_1 + \mu_2)$.

Capitolul 7

Teoria grafurilor

7.1 Grafuri

Definiţie 7.1.1. O pereche $G = (X, \Gamma)$, formată dintr-o mulţime nevidă X şi o aplicaţie $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, se numeşte **graf(orientat)**. Elementele mulţimii X se numesc **vârfurile grafului** G. O pereche de vârfuri (x, y) cu proprietatea că $y \in \Gamma(x)$ se numeşte **arc al grafului** G. Vom nota cu $\mathcal{A}$ mulţimea arcelor grafului G. Dacă $a = (x, y) \in \mathcal{A}$, vârful x se numeşte **originea** sau **vârful iniţial** al arcului a, iar y este **ţinta** sau **vârful final** al arcului a. Un arc $(x, x) \in \mathcal{A}$ pentru care originea şi ţinta coincid se numeşte **buclă în vârful** x. Dacă $a = (x, y) \in \mathcal{A}$ este un arc cu originea x şi ţinta y, spunem că **arcul** a **este incident exterior vârfului** x, respectiv este **incident interior vârfului** y.

Observaţie 7.1.2. Pentru un vârf $x \in X$ al unui graf $G = (X, \Gamma)$ cu mulţimea arcelor $\mathcal{A}$, notăm

$$\Gamma^+(x) = \Gamma(x)\,, \quad \Gamma^-(x) = \{y \in X |\, x \in \Gamma(y)\}\,,$$

$$\mathcal{A}^+(x) = \{x\} \times \Gamma^+(x)\,, \quad \mathcal{A}^-(x) = \Gamma^-(x) \times \{x\}\,.$$

Observaţie 7.1.3. Pentru orice vârf $x \in X$, $\Gamma^+(x) = \Gamma(x)$.

Definiţie 7.1.4. Pentru un vârf $x \in X$, numerele $d^+(x) = |\mathcal{A}^+(x)|$ şi $d^-(x) = |\mathcal{A}^-(x)|$, respectiv şi $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$ se numesc **semigradul exterior, semigradul interior**, respectiv **gradul (total al) vârfului** x.

Definiţie 7.1.5. Un graf $G = (X, \Gamma)$ pentru care mulţimea X a vârfurilor este finită se numeşte **graf finit**. În întregul capitol vom considera doar grafuri finite.

Propoziţie 7.1.6. *Pentru un graf finit* $G = (X, \Gamma)$ *au loc egalităţile*

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = |\mathcal{A}| .$$

Demonstraţie. Deoarece mulţimea arcelor se poate partiţiona în cele două moduri

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}^+(x) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}^-(x) ,$$

avem că

$$|\mathcal{A}| = \sum_{x \in X} |\mathcal{A}^+(x)| = \sum_{x \in X} |\mathcal{A}^-(x)| ,$$

de unde rezultă egalităţile enunţate. □

Definiţie 7.1.7. Fie $x, y \in X$ două vârfuri oarecare fixate ale unui graf $G = (X, \Gamma)$. Un şir ordonat $d = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ de vârfuri cu proprietatea că $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{A}$, $(\forall) i = \overline{0, n-1}$ se numeşte **drum de la vârful** x **la vârful** y. x se numeşte **vârful iniţial al drumului** d, iar y este **vârful final al lui** d. Numărul n de arce din care este compus drumul d se numeşte **lungimea drumului** d, notată $l(d)$.

Un drum d se numeşte **drum simplu** dacă $(x_i, x_{i+1}) \neq (x_j, x_{j+1})$, $(\forall) 0 \leq i < j \leq n-1$. Un drum simplu care conţine toate arcele grafului se numeşte **drum eulerian**.

Un drum se numeşte **drum elementar** dacă $x_i \neq x_j$, $(\forall) 0 \leq i < j \leq n$. Un drum elementar care conţine toate vârfurile grafului se

numeşte **drum hamiltonian**.
Vom nota cu $\mathcal{D}(G)$ mulţimea drumurilor din graful G, respectiv cu $\mathcal{D}^s(G)$, $\mathcal{D}_E(G)$, $\mathcal{D}^e(G)$, $\mathcal{D}_H(G)$ şi $\mathcal{D}_n(G)$ mulţimile drumurilor simple, a celor euleriene, a celor elementare, a celor hamiltoniene, respectiv a celor de lungime n.

Observaţie 7.1.8. Lungimea unui drum eulerian d_E într-un graf $G = (X, \Gamma)$ este egală cu numărul arcelor din acel graf. Astfel, $\mathcal{D}_E(G) = \mathcal{D}^s(G) \cap \mathcal{D}_{|\mathcal{A}|}(G)$.
Lungimea unui drum hamiltonian d_H într-un graf $G = (X, \Gamma)$ este $l(d_H) = |X| - 1$. Prin urmare $\mathcal{D}_H(G) = \mathcal{D}^e(G) \cap \mathcal{D}_{n-1}(G)$.

Definiţie 7.1.9. Un drum $c = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = x)$ cu proprietatea că vârful final coincide cu cel iniţial se numeşte **circuit**. Un circuit care este drum simplu se numeşte **circuit simplu**. Un circuit simplu care conţine toate arcele grafului se numeşte **circuit eulerian**. Un circuit cu proprietatea că $x_i \neq x_j$, $(\forall) 0 \leq i < j \leq n-1$ se numeşte **circuit elementar**. Un circuit elementar care conţine toate vârfurile grafului se numeşte **circuit hamiltonian**.

Definiţie 7.1.10. Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf şi $x, y \in X$ două vârfuri ale sale. Dacă există un drum $d = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ având vârful iniţial x şi vârful fina y, spunem că **vârful x precede vârful y în graful** G. Notăm în acest caz $x \prec y$.

Propoziţie 7.1.11. *Relaţia $\prec$ este o relaţie tranzitivă.*

Corolar 7.1.12. *Relaţia $\approx$ definită pe X prin*

$$x \approx y \Longleftrightarrow x = y \vee x \prec y \vee y \prec x$$

este o relaţie de echivalenţă pe X.

Definiţie 7.1.13. Relaţia $\approx$ se numeşte **relaţia de conexitate tare pe graful** G. Clasa de echivalenţă a unui vârf x,

$$K_x = [x]_\approx = \{y \in X | \, x \approx y\}$$

se numeşte **componenta tare conexă a vârfului** x. Dacă există un vârf $x \in X$, astfel încât $[x]_\approx = X$, spunem că **graful G este tare conex**.

Propoziţie 7.1.14. *Dacă un graf G conţine un circuit hamiltonian, atunci G este tare conex.*

Definiţie 7.1.15. Un graf $G = (X, \Gamma)$ cu proprietatea că

$$(x, y) \in \mathcal{A} \Longrightarrow (y, x) \in \mathcal{A}$$

se numeşte **graf simetric**.

Propoziţie 7.1.16. *Dacă $G = (X, \Gamma)$ este un graf oarecare, graful $\overline{G} = (X, \overline{\Gamma})$, unde*

$$\overline{\Gamma}(x) = \Gamma^{+}(x) \cup \Gamma^{-}(x) \quad , (\forall) x \in X \, ,$$

este un graf simetric.

Definiţie 7.1.17. Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf simetric. Pentru două vârfuri $x, y \in X$ cu proprietatea că $(x, y) \in \mathcal{A}$(deci şi $(y, x) \in \mathcal{A}$), notăm

$$[x, y] = \{(x, y), (y, x)\} \, .$$

Perechea neordonată $[x, y]$ se numeşte atunci **muchie între** x **şi** y, şi notăm cu $\mathcal{M} = \{[x, y] | \, (x, y), (y, x) \in \mathcal{A}\}$ mulţimea muchiilor. Perechea $(X, \mathcal{M})$ se numeşte **graf neorientat**. Două vârfuri $x, y \in X$ între care există o muchie se numesc **vârfuri adiacente**. Pentru $x \in X$, mulţimea

$$\mathcal{M}_x = \{y | \, [x, y] \in \mathcal{M}\}$$

se numeşte **mulţimea de adiacenţă a vârfului** x. Numărul $\delta(x) = |\mathcal{M}_x|$ se numeşte **gradul vârfului** x.

Propoziţie 7.1.18. *Dacă $(X, \mathcal{M})$ este un graf neorientat fără bucle, atunci*

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = 2|\mathcal{M}| \, .$$

Definiţie 7.1.19. Dacă $x, y \in X$ sunt două vârfuri oarecare fixate, un şir $l = [x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y]$, având proprietatea că $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{M}$, $(\forall) i = \overline{0, n-1}$, se numeşte **lanţ între vârfurile** x

şi y, iar x şi y se numesc **extremităţile lanţului** l. Numărul n se numeşte **lungimea lanţului** l.
Un lanţ pentru care toate muchiile sunt diferite se numeşte **lanţ simplu**. Un lanţ simplu care conţine toate muchiile grafului se numeşte **lanţ eulerian**.
Un lanţ ale cărui vârfuri sunt toate distincte se numeşte **lanţ elementar**. Un lanţ elementar care conţine toate vârfurile grafului se numeşte **lanţ hamiltonian**.
Un lanţ $c = [x = x_0, x_1, \ldots, x_n = x]$ se numeşte **ciclu**. Un ciclu care este lanţ simplu, respectiv eulerian se numeşte **ciclu simplu**, respectiv **ciclu eulerian**. Un ciclu pentru care singurele vârfuri care coincid sunt extremităţile se numeşte **ciclu elementar**. Un ciclu elemntar care conţine toate vârfurile se numeşte **ciclu hamiltonian**.

Definiţie 7.1.20. Un graf neorientat $G = (X, \mathcal{M})$ pentru care există un ciclu hamiltonian, se numeşte **graf hamiltonian**. Un graf neorientat pentru care există un ciclu eulerian, se numeşte **graf eulerian**.

Definiţie 7.1.21. Fie $G = (X, \mathcal{M})$ un graf neorientat şi $x, y \in X$ două vârfuri ale sale. Spunem că x **este conex cu** y dacă $x = y$ sau există un lanţ $[x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y]$ cu extremităţile x şi y. Notăm $x \sim y$ dacă vârfurile x şi y sunt conexe.

Propoziţie 7.1.22. *Relaţia de conexiune $\sim$ definită pe mulţimea X a vârfurilor unui graf este o relaţie de echivalenţă.*

Definiţie 7.1.23. Fie $x \in X$ un vârf al grafului neorientat $G = (X, \mathcal{M})$. Clasa sa de echivalenţă în raport cu relaţie de conexiune

$$C_x = [x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

se numeşte **componenta conexă a vârfului** x. Un graf neorientat G cu proprietatea că $[x]_\sim$ pentru un $x \in X$ se numeşte **graf conex**.

Propoziţie 7.1.24. *Dacă un graf neorientat $G = (X, \mathcal{M})$ este admite un ciclu hamiltonian, atunci graful G este conex.*

Propoziţie 7.1.25. *Condiţia necesară şi suficientă ca un graf neorientat* $G = (X, \mathcal{M})$ *să fie eulerian este ca* G *să fie conex, iar* $\delta(x)$ *să fie număr par pentru orice* $x \in X$. *Condiţia necesară şi suficientă ca un graf neorientat să conţină un lanţ eulerian este ca* G *să fie conex şi fie toate gradele* $\delta(x)$, $x \in X$, *să fie numere pare, fie să existe exact două vârfuri* x *şi* y *având gradele impare, iar toate celelalte vârfuri să aibă gradele pare.*

Propoziţie 7.1.26. *O condiţie necesară ca un graf orientat* G *fără vârfuri izolate să admită un circuit eulerian este ca graful neorientat asociat să fie conex, iar semigradul exterior şi cel interior al fiecărui vârf să coincidă:*

$$d^+(x) = d^-(x) \quad , (\forall)x \in X \, .$$

Dacă în graful G *există un drum eulerian, iar* G *nu are vârfuri izolate, atunci graful neorientat asociat este conex, şi fie*

$$d^+(x) = d^-(x) \quad , (\forall)x \in X \, ,$$

fie există două vârfuri $x_\alpha, x_\omega \in X$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} &d^+(x) = d^-(x) \, , (\forall)x \in X \setminus \{x_\alpha, x_\omega\} \, , \\ &d^+(x_\alpha) = d^-(x_\alpha) + 1 \, , d^+(x_\omega) = d^-(x_\omega) - 1 \, . \end{aligned}$$

În acest ultim caz, orice drum eulerian în graful G *are vârful iniţial* x_α *şi vârful final* x_ω.

7.1.1 Matrice asociate unui graf

Definiţie 7.1.27. Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf orientat finit, având mulţimea vârfurilor $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi mulţimea arcelor $\mathcal{A}$. **Matricea de adiacenţă** asociată grafului G este matricea $M_{ad} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\{0,1\})$ având elementele

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & , (x_i, x_j) \in \mathcal{A} \\ 0 & , (x_i, x_j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Observaţie 7.1.28. Matricea de adiacenţă indică existenţa unui arc, sau, echivalent, a unui drum de lungime 1 de la vârful x_i la vârful x_j.

Propoziţie 7.1.29. *Dacă $M_{ad} = (m_{ij})$ este matricea de adiacenţă a unui graf G, semigradele unui vârf sunt date de egalităţile*

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$$
$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}$$

Propoziţie 7.1.30. *Puterea a $k-$a a matricei de adiacenţă a unui graf G, $M_{ad}^k = (m_{ij}^{(k)})$ indică numărul drumurilor de lungime k existente în graful dat. Astfel, elementul $m_{ij}^{(k)}$ este egal cu numărul de drumuri cu vârful iniţial x_i şi vârful final x_j.*

Definiţie 7.1.31. Înmulţirea şi adunarea booleană sunt operaţiile binare $\oplus$ şi $\odot$ definite pe $\{0,1\}$ prin $a \oplus b = max(a,b)$, respectiv $a \odot b = min(a,b)$.

Observaţie 7.1.32. Pentru orice $a, b \in \{0,1\}$ au loc egalităţile

$$a \oplus b = a + b - ab$$
$$a \odot b = ab\,.$$

Operaţiile boolene se pot extinde la matrice cu elemente din mulţimea $\{0,1\}$.

Propoziţie 7.1.33. *Puterea booleană a $k-$a a matricei de adiacenţă a unui graf G, $(M_{ad}^b)^k = (m_{ij}^{b,k})$ indică existenţa drumurilor de lungime k în graful G: $m_{ij}^{b,k} = 1$ dacă şi numai dacă există un drum cu vârful iniţial x_i şi vârful final x_j.*

Corolar 7.1.34. *Fie M_{ad} matricea de adiacenţă a unui graf G cu n vârfuri, iar $\overline{M} = I_n \oplus M_{ad}$. Puterea booleană a $k-$a $(\overline{M}^b)^k = (\overline{m_i j^{(k)}})$ a matricei $\overline{M}$ indică existenţa drumurilor de lungime cel mult k din graful G: $\overline{m_i j^{(k)}} = 1$ dacă şi numai dacă există un drum de lungime cel mult k cu vârful iniţial x_i şi vârful final x_j.*

Observaţie 7.1.35. Dacă G este un graf cu n vârfuri, iar de la vârful x_i există un drum către vârful x_j, atunci există un asemenea drum de lungime cel mult $n-1$. Prin urmare, are loc următoarea relaţie

$$x_i \preceq x_j \Longleftrightarrow \overline{m_{ij}^{(n-1)}} = 1\,.$$

De asemenea, dacă există $k \geq 1$ cu proprietatea că $(\overline{M}^b)^k = (\overline{M}^b)^{k+1}$, atunci $(\overline{M}^b)^{n-1} = (\overline{M}^b)^k$. Matricea $(\overline{M}^b)^{n-1}$ se numeşte **matricea precedenţelor(nestricte)** sau **matricea închiderii tranzitive**.

Propoziţie 7.1.36. *Cu notaţiile de mai sus, dacă* $\widetilde{M} = (\widetilde{m_i j})$ *este matricea cu elementele*

$$\widetilde{m_{ij}} = \overline{m_{ij}^{(n-1)}} \odot \overline{m_{ji}^{(n-1)}}\,,$$

atunci două vârfuri x_i şi x_j fac parte din aceeaşi componentă tare conexă dacă şi numai dacă $\widetilde{m_{ij}} = 1$.

Observaţie 7.1.37. Algoritmul lui Foulkes este un algoritm pentru determinarea componentelor tare conexe ale unui graf orientat bazat pe propoziţia precedentă. El constă din următoarele etape:
1) se construieşte matricea $\overline{M}$;
2) se calculează puterile boolene $(\overline{M}^b)^k$;
3) până când $(\overline{M}^b)^k = (\overline{M}^b)^{k+1}$;
4) se construieşte matricea $\widetilde{M}$;
5) se identifică componentele tare conexe folosind propoziţia precedentă.

Corolar 7.1.38. *Un graf G este tare conex dacă şi numai dacă* $(\overline{M}^b)^{n-1} = \widetilde{M} = (1)$.

Propoziţie 7.1.39. *O condiţie necesară ca într-un graf să existe un circuit hamiltonian este ca graful să fie tare conex. O condiţie necesară ca într-un graf să existe drumuri hamiltoniene este ca în*

graful respectiv componentele tare conexe să formeze un lanţ ordonat

$$K_1 \preccurlyeq K_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq K_k\,,$$

cu proprietatea că pentru orice $1 \le i < j \le k$ *şi orice* $x \in K_i, y \in K_j$ *are loc relaţia* $x \prec y$.

Definiţie 7.1.40. Matricea latină L **asociată unui graf** $G = (X, \Gamma)$ este matricea $L = (l_{ij})$ ale cărei elemente sunt mulţimile

$$l_{ij} = \begin{cases} \emptyset & , i = j \vee (x_i, x_j) \notin \mathcal{A} \\ (x_i, x_j) & , i \neq j \wedge (x_i, x_j) \in \mathcal{A}\,. \end{cases}$$

Matricea latină redusă este matricea $L^* = (\overline{l_{ij}})$ cu

$$\overline{l_{ij}} = \begin{cases} \emptyset & , i = j \vee (x_i, x_j) \notin \mathcal{A} \\ x_j & , i \neq j \wedge (x_i, x_j) \in \mathcal{A}\,. \end{cases}$$

Puterile latine ale matricei latine L sunt matricele $L^k = (l_{ij}^k)$ ale căror elemente sunt mulţimile de drumuri l_{ij}^k definite prin operaţia de **înmulţire latină** dată de juxtapunerea drumurilor şi eliminarea drumurilor care nu sunt elementare:

$$\begin{aligned} l_{ij}^{k+1} = \{&(x_i = x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}} = x_j) |\, (x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in l_{i,i_k}^k, \\ &x_j \neq x_{i_p}, p = \overline{0,k}, (x_{i_k}, x_j) \in \mathcal{A}\}\,. \end{aligned}$$

Propoziţie 7.1.41. *Elementele mulţimii* l_{ij}^k *sunt toate drumurile elementare care au vârful iniţial* x_i *şi vârful final* x_j.

Corolar 7.1.42. *Graful* G *conţine drumuri hamiltoniene dacă şi numai dacă* $L^{n-1} \neq (\emptyset)$. *În acest caz drumurile hamiltoniene cu vârful iniţial* x_i *şi vârful final* x_j *sunt elementele mulţimii* l_{ij}^{n-1}.

Definiţie 7.1.43. Un graf $G = (X, \Gamma)$ pentru care este definită o funcţie $v : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte **graf valorizat**. Dacă $(x_i, x_j) \in \mathcal{A}$ este un arc, notăm $v_{ij} := v(x_i, x_j)$. Dacă $d = (x_0, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n)$ este un drum în graful G, valoarea drumului d este

$$v(d) = v(x_0, x_1) + v(x_1, x_2) + \ldots + v(x_{n-1}, x_n) = v_{01} + v_{12} + \ldots + v_{n-1,n}.$$

Observaţie 7.1.44. O problemă studiată adesea în legătură cu grafurile valorizate este cea a determinării drumurilor de valoare optimă(minimă sau maximă) între două vârfuri, adică a drumurilor d între un vârf x_i şi un vârf x_f cu proprietatea că pentru orice drum d' de la x_i la x_f are loc inegalitatea

$$v(d) \leq v(d') \ (optim = min)\,, \quad \text{resp. } v(d) \geq v(d') \ (optim = max).$$

Propoziţie 7.1.45. *Un drum de valoare optimă între două puncte se compune din drumuri parţiale de valoare optimă.*

Demonstraţie. Fie $d = (x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ un drum de valoare minimă(cazul optim=maxim se discută analog, schimbând sensurile inegalităţilor) de la vârful x_0 la vârful x_n. Atunci

$$v(d) = v(x_0, \ldots, x_i) + v(x_i, \ldots, x_j) + v(x_j, \ldots, x_n)\,.$$

Dacă d'' este un drum oarecare între vârfurile x_i şi x_j, atunci drumul d' obţinut prin concatenarea drumurilor $(x_0, \ldots, x_i)$, d'' şi $(x_j, \ldots, x_n)$ este un drum de la x_0 la x_n, astfel că $v(d') \geq v(d)$. Rezultă că $v(d'') \geq v(x_i, \ldots, x_j)$ şi prin urmare drumul parţial de la x_i la x_j conţinut în drumul de la x_0 la x_n este un drum de valoare minimă între x_i şi x_j. □

Observaţie 7.1.46. Diferiţii algoritmi utilizaţi pentru determinarea drumurilor de valoare optimă se bazează pe proprietatea dată în propoziţia precedentă.

Observaţie 7.1.47. Dacă graful valorizat G are circuite, problema determinării drumurilor de valoare optimă nu are întotdeauna soluţii. Din acest motiv vom studia această problemă doar pentru grafuri fără circuite.

Exemplu 7.1.48. Algoritmul lui Ford permite determinarea tuturor drumurilor de valoare optimă având un anumit vârf iniţial fixat x_α. Etapele algoritmului sunt:

1) se asociază fiecărui vârf x_i al grafului un marcaj iniţial λ_i^0 în modul următor

$$\lambda_\alpha^0 := 0\,, \qquad \lambda_i^0 = \begin{cases} +\infty & optim = min \\ -\infty & optim = max\,, \end{cases} \qquad (\forall) i \neq \alpha\,.$$

2) se verifică dacă marcajele λ_i^k verifică condiţia de optimalitate

$$\begin{cases} \lambda_j^k \leq \lambda_i^k + v_{ij} & (\forall)(x_i, x_j) \in \mathcal{A} \quad optim = min \\ \lambda_j^k \geq \lambda_i^k + v_{ij} & (\forall)(x_i, x_j) \in \mathcal{A} \quad optim = max\,, \end{cases}$$

3) dacă marcajele λ_i^k nu verifică condiţia de optimalitate, se determină marcaje noi λ_i^{k+1}:

$$\lambda_j^{k+1} := optim\{\lambda_i^k + v_{ij} |\, (x_i, x_j) \in \mathcal{A}\}\,.$$

Etapele 2 şi 3 se repetă până când marcajele obţinute verifică condiţia de optimalitate.

Dacă marcajele optime sunt λ_i, în caz că $\lambda_i \in \mathbb{R}$ acesta reprezintă valoarea unui drum de valoare optimă de la x_α la x_i. Dacă $\lambda_i \in \{\pm\infty\}$, atunci nu există drumuri de la x_α la x_i.

4) Drumurile optime se identifică în modul următor: Arcele $(x_i, x_j) \in \mathcal{A}$ care fac parte din drumuri de valoare optimă sunt exact cele pentru care

$$\lambda_j = \lambda_i + v_{ij}\,.$$

Exemplu 7.1.49. Algoritmul Belman-Kalaba permite determinarea drumurilor de valoare optimă având un anumit vârf final x_ω. Etapele algoritmului sunt:
1) se construieşte matricea valorilor $W = (w_{ij})$ cu elementele

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ v_{ij} & i \neq j,\ (x_i, x_j) \in \mathcal{A} \\ +\infty & i \neq j,\ (x_i, x_j) \notin \mathcal{A},\ optim = min \\ -\infty & i \neq j,\ (x_i, x_j) \notin \mathcal{A},\ optim = max \end{cases}$$

şi matricea coloană Y^0 cu elementele

$$y_\omega^0 = 0\,, \qquad y_i^0 = \begin{cases} +\infty & optim = min \\ -\infty & optim = max\,, \end{cases} \qquad (\forall) i \neq \omega\,.$$

2) Fiind dată matricea coloană Y^k se calculează Y^{k+1} cu elementele:

$$y_i^{k+1} = optim\{w_{ij} + y_j^k \,|\, j = \overline{1,n}\}\,.$$

Etapa 2 se repetă până când $Y^{m+1} = Y^m$. Elementele matricei coloană Y^m reprezintă în acest caz valorile drumurilor optime.

3) Arcele (x_i, x_j) care fac parte din drumurile de valoare optimă către vârful x_ω sunt cele care verifică egalitatea

$$y_i^m = w_{ij} + y_j^m\,.$$

7.2 Probleme propuse

Problema 7.1. *Să se determine componentele tare conexe ale grafului $G = (X, \Gamma)$, având mulţimea vârfurilor*

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

şi mulţimea arcelor

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_2, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_8, x_5), (x_8, x_6), (x_8, x_7)\}.$$

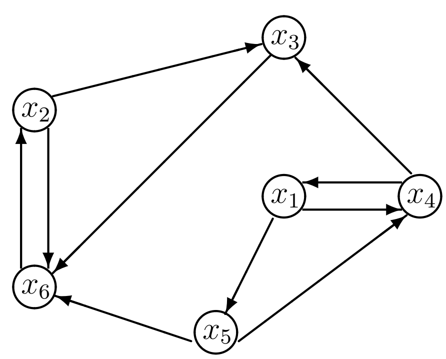
Problema 7.2. Determinaţi drumurile hamiltoniene din graful $G = ()X, \Gamma)$ din problema precedentă.

Problema 7.3. Determinaţi matricea de adiacenţă, cea booleană şi cea latină ale grafului $G = (X, \Gamma)$ din prima problemă.

Problema 7.4. Fie graful $G = (X, \Gamma)$ cu mulţimea vârfurilor $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ şi funcţia Γ cu imaginile $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_5\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_3\}$, $\Gamma(x_3) = \{x_5\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $\Gamma(x_5) = \{x_3\}$. Determinaţi semigradele exterioare şi interioare ale vârfurilor şi gradele totale ale acestora.

Problema 7.5. Studiaţi existenţa drumurilor euleriene şi hamiltoniene în graful din problema precedentă.

Problema 7.6. Fie graful G reprezentat în figura de mai jos



Determinaţi cu ajutorul puterilor matricei boolene toate drumurile de lungime cel mult 4.

Problema 7.7. Fie $G = (X, \Gamma)$ graful determinat de mulţimea vârfurilor

$$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

şi mulţimea arcelor

$$\mathcal{A} = \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_4, x_8), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_7, x_8)\}.$$

Graful G este valorizat prin funcţia v dată de valorile

$v_{01} = 3$, $v_{02} = 7$, $v_{03} = 4$, $v_{12} = 4$, $v_{15} = 7$, $v_{16} = 11$, $v_{24} = 1$, $v_{25} = 5$, $v_{32} = 5$, $v_{34} = 5$, $v_{45} = 4$, $v_{47} = 9$, $v_{48} = 14$, $v_{56} = 4$, $v_{57} = 6$, $v_{67} = 2$, $v_{68} = 7$, $v_{78} = 3$.

a) Determinaţi toate drumurile de valoare minimă cu vârful iniţial x_0.
b) Determinaţi toate drumurile de valoare minimă cu vârful final x_8.
c) Rezolvaţi problemele a) şi b) pentru drumuri de valoare maximă.

Bibliografie

[1] **Blaga,P., Pop,H.,** *Latex 2_ε,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1999

[2] **Ciucu,G., Craiu,V., Săcuiu,I.,** *Probleme de Teoria Probabilităţilor,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1974

[3] **Ciucu,G., Tudor,C.,** *Teoria Probabilităţilor şi aplicaţii,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983

[4] **Cocârlan,P., Roşculeţ,M.,** *Serii trigonometrice şi aplicaţii,* Editura Academiei, Bucureşti, 1991

[5] **Constantin,Gh., Miheţ,D.,** *Îndrumător pentru rezolvarea problemelor de teoria probabilităţilor,* Tipografia Universităţii din Timişoara, Timişoara, 1980

[6] **Crstici,B.,**& **colectiv,** *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[7] **Cuculescu,I.,** *Teoria Probabilităţilor,* Editura ALL, Bucureşti, 1998

[8] **Gaşpar,D., Suciu,N.,** *Analiză matematică. Introducere în analiza complexă,* Tipografia Universităţii din Timişoara, Timişoara, 1989

[9] **S.I.Grossman** *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations,* Harcourt Brace Jovanovich, 1986.

[10] **Hamburg,P.,Mocanu,P.,Negoescu,M.,** *Analiză matematică(Funcţii complexe),* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[11] **Ionescu,T.,** *Grafuri. Aplicaţii(vol.I),* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[12] **Klimov,G.,** *Probability Theory and Mathematical Statistics,* Mir Publishers, Moscow, 1986

[13] **Lipovan,O.,** *Matematici speciale,* Editura Politehnica, Timişoara, 2007

[14] **Mihoc,Gh., Micu,N.,** *Teoria Probabilităţilor şi Statistică Matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[15] **Mocică,Gh.,** *Probleme de funcţii speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988

[16] **Moroşanu,G.,** *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii,* Editura Academiei, Bucureşti, 1989

[17] **Onicescu,O.,** *Probabilităţi şi procese aleatoare,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977

[18] **Pusztai,A., Ardelean,Gh.,** *LaTeX, Ghid de utilizare,* Editura tehnică, Bucureşti, 1994

[19] **Radu,V., Barbu,D., Părău,E., Surulescu,N.,** *Elemente de Teoria Probabilităţilor şi Aplicaţii* Editura MIRTON, Timişoara, 1997

[20] **Rădescu,N., Rădescu,E.,** *Probleme de Teoria Grafurilor,* Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1982

[21] **Reischer,C., Sâmboan,A.,** *Culegere de probleme de teoria probabilităţilor şi statistică matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972

[22] **Reischer,C., Sâmboan,G., Theodorescu,R.,** *Teoria probabilităţilor,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967

[23] **Rogai,E.,** *Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale* Editura Tehnică, Bucureşti, 1965

[24] **Rudner,V.,Nicolescu,C.** *Probleme de matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[25] **Şabac,I.Gh.,** *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965

[26] **Şaichin,A.,** *Exerciţii şi probleme de calcul inegral,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1958

[27] **C.Udrişte, C.Radu, C.Dicu, O.Mălăncioiu** *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţi diferenţiale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.